

Éléments finis

M. Kern

PC 2

Exercice I Éléments finis en dimension 1 On considère le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(p(x)u'(x))' + q(x) \end{array} \right.$$

2) On note $e_j = (u - I_h u)|_{[x_j, x_{j+1}]}$. En utilisant $e_j(x_j) = e_j(x_{j+1}) = 0$, montrer qu'il existe $\xi \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que $e'_j(x) = \int_{\xi}^x e''_j(t) dt$. En déduire que

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |e'_j(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(x)|^2 dx.$$

3) Conclure que

$$\|u - I_h u\|_1 \leq h \left(\int_0^1 |u''(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Exercice III Éléments finis P_2 Soit T un triangle. On note (N_1, N_2, N_3) les sommets, N_4 resp (N_5, N_6) un point de l'arête $[N_1, N_3]$ (resp. $[N_3, N_1]$, $[N_1, N_2]$) à choisir.

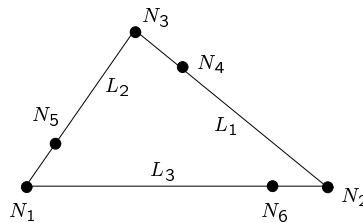


FIG. 1 – Triangle P_2

On note L_i l'équation de la droite qui définit le côté $3 - i$ (la fonction affine telle que un point est sur la droite $N_1 N_2$ ssi $L_3 = 0$). On note P_2 l'espace des polynômes de degré ≤ 2 .

- 1) Quelle est la dimension de P_2 ?
- 2) Soit P un polynôme en (x, y) de degré $d \geq 1$ qui s'annule sur une droite L . Montrer qu'on a $P = LQ$, où Q est un polynôme de degré $d - 1$.
- 3) Montrer qu'il existe une unique fonction de P_2 prenant des valeurs données aux points $(N_i)_{i=1, \dots, 6}$.
Exprimer les fonctions de base (prenant la valeur 1 en un point et 0 au 5 autres) en fonction des coordonnées barycentriques sur le triangle.
- 4) Soit deux triangles adjacents : Comment doit-on placer les points N_4, N_5, N_6 pour qu'une fonction P_2 sur chaque triangle soit *continue* sur $T_1 \cup T_2$?

Exercice IV Rectangle à 8 noeuds On considère un rectangle à 8 noeuds (figure 3), et l'espace de polynômes

$$P = \left\{ p \in Q_2, 4p(G) + \sum_{i=1}^4 p(A_i) - 2 \sum_{i=1}^5 p(A_i) = 0 \right\}.$$

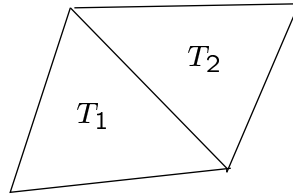


FIG. 2 – Deux triangles adjacents

FIG. 3 – Triangle P^2 bulle

- 1) Montrer que $P_2 \subset P$.
- 2) Montrer que l'élément de Lagrange correspondant est P unisolvant. Calculer les fonctions de base de cet élément.
- 3) Montrer que cet élément fini est conforme H^1 .

Exercice V Un élément fini « non standard » Étant donné un triangle K , on note b la fonction « bulle » (faire un dessin pour expliquer le nom de cette fonction)

$$b(x, y) = \lambda_1(x, y)\lambda_2(x, y)\lambda_3(x, y)$$

On note P l'espace de polynomes de la forme

$$P = \{p = p_2 + \alpha b, p_2 \in P^2, \alpha \in \mathbf{R}\}$$

- 1) Quelle est la dimension de P ? Montrer que $P_2 \subset P \subset P_3$, et que l'ensemble suivant est P unisolvant
- 2) Montrer, avec un minimum de calcul, que cet élément est conforme H^1 .

Exercice VI Laplacien dans un carré On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

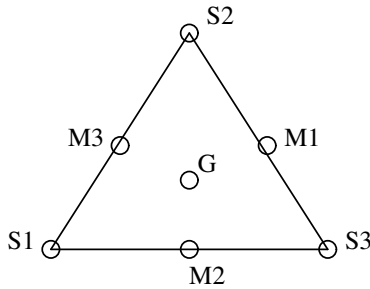


FIG. 4 – Triangle P^2 bulle

On discrétise le problème par éléments finis P_1 , en prenant un maillage régulier du carré Ω de pas $h = 1/(N + 1)$.

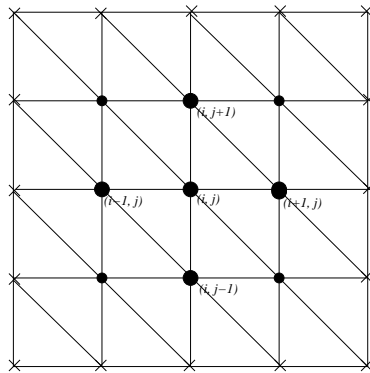


FIG. 5 – Maillage régulier du carré unité

On note $M_{ij} = (ih, jh), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N$ les points du maillage, et φ_{ij} la fonction de base associée au point M_{ij} .

- 1) Donner la formulation variationnelle de ce problème.
- 2) Quel est le support de φ_{ij} ? Écrire l'expression de φ_{ij} et des ses dérivées partielles dans chacun des triangles contenus dans le support.
- 3) Pour les couples (k, l) tels que $\text{supp } \varphi_{ij} \cap \text{supp } \varphi_{kl} \neq \emptyset$ calculer $\int_{\Omega} \nabla \varphi_{ij} \cdot \nabla \varphi_{kl}$.
En déduire les équations du système discret.
- 4) On adopte une numérotation des inconnues par colonne ;

$$U = (U_{11}, U_{21}, \dots, U_{N,1}, U_{12}, \dots, U_{ij}, \dots, U_{1,N}, \dots, U_{N,N}).$$

Écrire la matrice du système.