ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis, 2014-2015

Disque et anneau en rotation

David RYCKELYNCK

26 janvier 2015

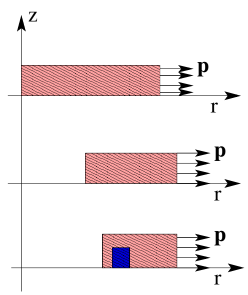
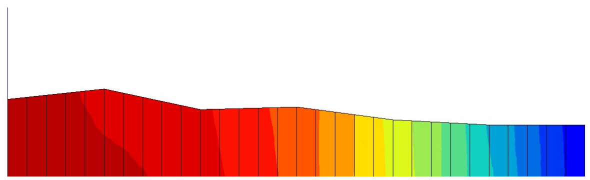


Schéma des différentes géométries à optimiser.

On étudie trois solides en rotation comme indiqué ci-contre, un disque et deux anneaux. Ils sont chargés en pression imposée à leur périphérie, ce qui est caractéristique d'un chargement de disque de turbine. Dans un disque en rotation autour de son axe, la force centrifuge donne naissance à des champs de contrainte biaxiaux $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta})$, la contrainte dominante étant la contrainte circonférencielle, qui est susceptible de provoquer l'éclatement. Dans un premier temps, on se pose le problème du disque, qui a une solution analytique, et on cherche à caractériser le profil qu'il faudrait donner à celui-ci pour que les champs de contraintes soient uniformes dans toute la structure. On trouve la solution par résolution du problème inverse au sein d'une boucle d'optimisation. On considère ensuite successivement le cas d'un anneau homogène, puis celui d'un anneau contenant un renfort en matériau composite de module plus important, ce qui permet de faire évoluer la forme de la pièce vers des dessins plus économiques en masse.

Le projet fait donc appel à des connaissances de mécanique des milieux continus pour bien comprendre les efforts en présence. Il fournit l'occasion de mener une procédure d'optimisation de forme élémentaire, en faisant intervenir une chaîne de programmes traitant des données.

- Code utilisé : ZéBuLoN
- Mots-clés : forces centrifuges, optimisation, matériaux composites



Exemple de maillage d'un disque plein et isovaleurs de contraintes.

Théorie, solution du problème de mécanique du disque et de l'anneau élastique en rotation, d'épaisseur uniforme et de rayon extérieur R.

- Champ de contrainte dans un disque

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,(R^2 - r^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\,\omega^2\,r^2$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

- Champ de contrainte dans un anneau d'alésage de rayon R_0

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8}\rho\,\omega^2\left(R^2 + R_0^2 - \frac{R^2 R_0^2}{r^2} - r^2\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3+\nu}{8}\rho\,\omega^2\left(R^2 + R_0^2 + \frac{R^2 R_0^2}{r^2} - \frac{1+3\,\nu}{3+\nu}\,r^2\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Solution du problème de mécanique du disque et de l'anneau élastique, d'épaisseur uniforme et de rayon R, soumis à une pression $-p$ sur son rayon extérieur.

- Champ de contrainte dans un disque

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p$$

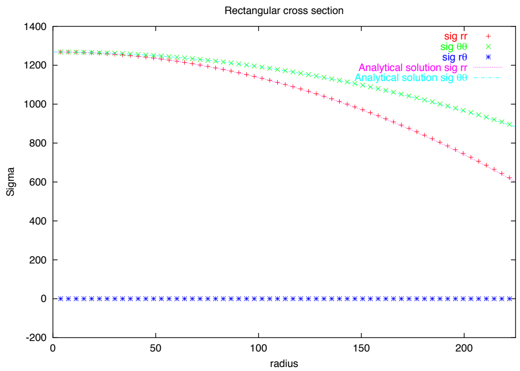
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

- Champ de contrainte dans un anneau d'alésage de rayon R_0

$$\sigma_{rr} = \frac{p\,R^2}{R^2 - R_0^2}\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p\,R^2}{R^2 - R_0^2}\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

Le profil des contraintes obtenues dans le cas du disque est représenté sur la figure ci-dessous.



Profil des contraintes.

Problème d'optimisation

Nous souhaitons trouver une forme optimale permettant de retrouver le cas idéal d'un état de contrainte uniforme comme dans le cas du disque soumis à une pression sur son rayon extérieur. On souhaite donc satisfaire l'équation suivante : $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = const$ en jouant sur l'épaisseur du disque. Pour le disque l'épaisseur optimale est donnée par :

$$h = h_0 \exp\left(\frac{\rho\,\omega^2 R^2}{2\,p}(1-\frac{r^2}{R^2})\right)$$

On souhaite retrouver cette répartition d'épaisseur en couplant une simulation éléments finis à une méthode numérique d'optimisation. La géométrie est décrite à l'aide de 6 paramètres d'épaisseur notés A=$(z_1, ..., z_6)$. On propose de minimiser la fonction $\mathscr{L}(A)$ pour obtenir la forme optimale du disque, avec :

$$\mathscr{L}(A) = \int_V (\sigma_{rr}(A) - p)^2 + (\sigma_{\theta\theta}(A) - p)^2 \, dv$$

où $\sigma_{rr}(A)$ et $\sigma_{\theta\theta}(A)$ sont estimés par la méthode des éléments finis.

Modèle éléments finis et propriétés du matériau

Les structures étudiées étant axisymétriques, d'axe de rotation y, seul un quart de la section centrale des disques et des anneaux sont considérés, avec les conditions aux limites qui conviennent. Le disque est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope, de module de Young $E = 194 GPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La vitesse angulaire est $\omega = 2000 rad/s$. La masse volumique est $\rho = 8.10^{-9} t/mm^3$. Le rayon extérieur des disques et des anneaux est $R = 225 mm$. L'épaisseur minimale est $h_0 = 5 mm$.

Fichiers fournis dans le répertoire Full_Disc

1. disk_old.mast – fichier texte décrivant la géométrie du disque, la commande Zmaster disk_old.mast permet de visualiser cette géométrie. L'unité de longueur choisie est le mm.

2. disk.mast.tmpl – fichier texte décrivant le rôle des paramètres modifiés par l'algorithme d'optimisation.
3. disk.inp – fichier de commande pour la simulation éléments finis à l'aide de l'instruction Zrun disk.inp. Ce fichier contient aussi des commandes de post-traitement des résultats de calcul. Ce post-traitement s'effectue avec la commande Zrun -pp disk.
4. otim.inp – commandes pour l'optimisation de la géométrie. S'exécute avec Zrun -o optim.inp
5. elast.mat – description du comportement mécanique du matériau et coefficients associés.
6. SIMU2 – script pour mettre en forme la prévision des contraintes et en déduire un vecteur qui pour les paramètres optimaux doit être égal au vecteur stocké dans le fichier zero.txt.
7. DES, SOL – fichiers de commandes gnuplot pour la visualisation de courbes avant optimisation (sigma_non_opt) et après optimisation (sigma_opt, res.opt).

Travail demandé

Etude du contenu des fichiers de commande

1. Editer le fichier disk_old.mast pour analyser la syntaxe utilisée pour déclarer des points, des lignes et des domaines. Utiliser la commande Zmaster disk_old.mast pour visualiser le disque décrit par disk_old.mast . Le maillage du disque peut être construit avec la commande Zrun -B disk_old.mast et sauvegardé dans le fichier disk_old.geof. En executant Zmaster disk_old.geof on visualise directement le maillage du disque.
2. Editer le fichier disk.mast.tmpl. Comparer ce fichier à disk_old.mast. Localiser les paramètres dont les noms sont précédés d'un point d'interrogation.
3. Editer le fichier de commande disk.inp.
   - Les lignes comprises entre ****calcul et ****return décrivent le calcul par la méthode des éléments finis. Après ****calcul on spécifie le type d'équation aux dérivées partielles à résoudre.
   - une instruction débute par trois astérisques ***, jusqu'aux prochain *** ou ****return.
   - ***resolution décrit la séquence de chargement et sa durée.
   - ***bc décrit les conditions aux limites et les chargements volumiques
   - **centrifugal définit la force centrifuge due à la rotation du disque autour de l'axe d2 passant par le point de coordonnées (0. 0.), avec une vitesse angulaire de 2000 rad.s^{-1}.
   - **impose_nodal_dof décrit ici les conditions de symétrie

appliquées au groupe de nœuds symz

- **pressure permet de spécifier la valeur de la force surfacique appliquée à la surface dénommée ici ext, time indique la dépendance linéaire en temps du chargement.
- ***output, suivi de **test indique les résultats que l'on souhaite sauvegarder dans le fichier disk.test. *gauss_var désigne une valeur définie au point de Gauss suivi du numéro d'élément et du numéro de point de Gauss dans l'élément de référence et des noms des variables à sauvegarder. Ici σ_{11} et σ_{33} correspondent à σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$.
- ***material permet de désigner le fichier décrivant le matériau. En insérant la commande **elset nom_elset, au dessus de la ligne *file nom_fic, on peut spécifier que le comportement décrit dans le fichier nom_fic concerne uniquement le groupe d'éléments de nom nom_elset.

4. Editer le fichier de commande d'optimisation optim.inp.
   - ****optimize marque le début des commandes d'optimisation. Différents algorithmes sont disponibles. Pour tester la mise en données utiliser l'option single, sinon utiliser l'algorithme de Levenberg Marquardt avec l'option levenberg_marquardt.
   - ***files permet de désigner le fichier .tmpl définissant le rôle des paramètres à optimiser.
   - ***shell décrit une liste de commandes linux exécutées après chaque modification des paramètres.
   - ***values définie pour chaque paramètre des valeurs initiale, minimale et maximale.
   - ***compare i_file_file décrit la méthode de comparaison de deux fichiers contenant chacun un vecteur dont la norme euclidienne de la différence doit être minimisée.

Réaliser l'optimisation de la géométrie du disque

1. Avec l'option single activée dans le fichier optim.inp, exécuter la commande Zrun -o optim. Puis visualiser le maillage ainsi construit avec la commande Zmaster disk, en cliquant sur le bouton mesh. Le bouton results permet de visualiser les champs calculés. L'option contour permet de visualiser les déplacements définis aux nœuds. L'option gauss_point permet de visualiser le résultat brut du calcul des contraintes, aux points de Gauss. Comparer le profil des contraintes à la solution analytique avec le script DES.
2. Faire fonctionner l'optimisation avec l'algorithme de Levenberg Marquardt. En fin de processus, comparer la solution numérique de distribution d'épaisseur à la solution analytique avec la commande SOL. Utiliser les fichiers gnuplot pour visualiser le profil des contraintes.
3. Essayer de changer la valeur minimale du disque et observer ce que donne l'optimisation, en la diminuant puis en l'augmentant. Le critère est-il toujours bien adapté pour me-

ner l'optimisation ? Observer la distribution des contraintes avec Zmaster.

4. Essayer d'utiliser les contraintes calculées au 5ème point de Gauss de chaque élément.
5. Modifier les valeurs minimales et maximales des paramètres pour contraindre la géométrie optimale.

Etude d'un anneau en rotation, répertoire Reamed_Disc

Le rayon intérieur est de 100 mm, le rayon extérieur est de 220 mm.

Travail demandé

1. Reprendre les étapes précédentes d'analyse du contenu des fichiers.
2. La fonction à optimiser a changé, pour quelle raison selon vous ?
3. Commenter la forme optimale proposée par l'algorithme d'optimisation.
4. Modifier si nécessaire la valeur maximale des paramètres.
5. Est-il envisageable de prendre comme objectif de distribution radiale des contraintes, celle obtenue à vitesse de rotation nulle pour un anneau d'épaisseur constante ? Si oui, proposer une application numérique.
6. Modifier le comportement mécanique d'un domaine R_i du maillage, en le rendant plus rigide afin d'en observer les conséquences sur la géométrie optimale. On pourra prendre les caractéristiques d'un anneau en fibre de carbone avec un module de Young de 390 000 MPa et une masse volumique de $1,7\,10^{-9}\,t/mm^3$, tout en gardant un comportement isotrope (alors que la fibre de carbone est a un comportement anisotrope). Pour décrire un matériau hétérogène il faut affecter aux différents sous domaines R1, R2, ... un comportement avec la commande ***material et l'option **elset R1 pour décrire le comportement du domaine R1 par exemple.
7. Proposer des modifications pour réaliser une estimation plus précise de l'intégrale comprise dans la fonction $\mathscr{L}(A)$.