

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Enseignement spécialisé «Eléments finis» S3733-S3735

**METHODES DE RESOLUTION
EN ELEMENTS FINIS**

Stéphanie Basseville

Frédéric Feyel

3ème – 5ème semestre
Année 2005 – 2006

Table des matières

| | |
|---------------------|----------|
| Introduction | 4 |
|---------------------|----------|

| | |
|----------------------------------------------|----------|
| I Discrétisation de problème de champ | 7 |
|----------------------------------------------|----------|

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| I.1 Structures élastiques avec amortissement linéaire | 8 |
| I.1.1 Formulation du problème aux limites | 8 |
| I.1.2 Formulation variationnelle | 9 |
| I.1.3 Discrétisation en éléments finis | 9 |
| I.2 L'équation «quasi-harmonique» | 11 |
| I.2.1 Formulation générale | 11 |
| I.2.2 Approximation par éléments finis | 12 |
| I.2.3 Remarques : | 13 |
| I.2.4 Application : l'équation de conduction de chaleur en régime transitoire . . | 13 |

| | |
|----------------------------------------------|-----------|
| II Méthodes analytiques de résolution | 17 |
|----------------------------------------------|-----------|

| | |
|----------------------------------------------------------------|----|
| II.1 Classification générale | 17 |
| II.2 Les vibrations libres | 18 |
| II.2.1 Vibrations libres non amorties | 18 |
| II.2.2 Valeurs propres de problèmes du premier ordre | 20 |
| II.2.3 Valeurs propres de problèmes du second ordre | 20 |
| II.3 Vibration périodique forcée | 20 |
| II.4 Régimes transitoires | 21 |

| | | |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| II.4.1 | Introduction | 21 |
| II.4.2 | Décomposition modale | 21 |
| III Méthodes de résolution par récurrence | | 25 |
| <hr/> | | |
| III.1 | Introduction | 25 |
| III.2 | Schémas à un pas pour les équations du premier ordre | 26 |
| III.2.1 | Méthode du point milieu généralisée | 26 |
| III.2.2 | Méthode des trapèzes généralisée | 28 |
| III.2.3 | Application au problème de conduction de chaleur | 28 |
| III.2.4 | Stabilité | 29 |
| III.2.5 | Valeur critique Δt | 31 |
| III.3 | Schémas à un pas | 32 |
| III.3.1 | Introduction | 32 |
| III.3.2 | L'algorithme SSpj | 33 |
| III.3.3 | L'algorithme de Newmark «GN22» | 35 |
| III.3.4 | Stabilité | 36 |
| III.3.5 | Valeur critique Δt | 38 |
| | Quelques références | 39 |

INTRODUCTION

Il existe de nombreux problèmes physiques faisant intervenir la variable temps. A titre d'exemples, on peut penser aux problèmes de conduction de chaleur, de propagation électromagnétique, de propagation d'ondes dans un fluide.... L'objectif de ce cours est de présenter les algorithmes spécifiques à mettre en oeuvre en calcul par éléments finis dans des situations dépendant du temps.

L'exposé est divisé en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous allons établir par une simple extension des méthodes par éléments finis les équations différentielles sous forme matricielle auxquelles obéissent un grand nombre de problèmes.

Deux exemples physiques faisant intervenir la variable temps sont traités :

- l'étude du comportement dynamique des structures ;
- une classe particulière de problèmes dont la formulation se fait à l'aide d'équations quasi-harmoniques (conduction de chaleur, de propagation électromagnétique...).

On montre que nous pouvons regrouper ces problèmes en une seule catégorie dont la formulation matricielle est la suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0, \quad \{\ddot{q}\} = \frac{d^2\{q\}}{dt^2} \quad \{\dot{q}\} = \frac{d\{q\}}{dt}. \quad (1)$$

- Le second chapitre est consacré aux méthodes analytiques de résolution de systèmes linéaires d'équations différentielles. On s'intéresse à trois types de réponses : les réponses libres, les réponses périodiques et les réponses transitoires. Pour chaque type de réponse, on présente les méthodes de résolution analytique.
- Malgré l'existence de méthodes analytiques de résolution, la solution réelle de problèmes transitoires est difficile à obtenir. Dans le dernier chapitre, on revient à une discrétisation par éléments finis à partir d'une fonction test, appliquée maintenant au domaine temporel. On considère ainsi des intervalles de temps de longueur finie Δt en répétant les calculs pour les intervalles suivants avec de nouvelles conditions initiales. De nombreux processus à pas simple ou multiple permettent d'obtenir des relations de récurrence. Cependant, on présente dans ce cours uniquement des schémas à un pas pour les problèmes du premier et du second ordre. Pour finir, on discute la stabilité des schémas présentés.

Chapitre I

EXEMPLES DE DISCRÉTISATION PARTIELLE DE PROBLÈME DE CHAMP

INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'étudier différents phénomènes physiques faisant intervenir la variable temps. Tout d'abord, on s'intéresse à un problème particulier : le comportement dynamique des structures élastiques avec amortissement linéaire. On montre que la résolution par éléments finis conduit à la résolution d'un système différentiel du second ordre de la forme

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0. \quad (\text{I.1})$$

La méthode décrite pour les milieux continus élastiques peut être appliquée à une grande variété de phénomènes physiques : conduction de chaleur, répartition du potentiel électrique... Ceci nous amène à traiter les problèmes généraux régis par l'équation générale quasi-harmonique. On constate alors que la discrétisation par éléments finis permet également de ramener ce problème à un système de la forme (I.1).

I.1 Comportement dynamique de structures élastiques avec amortissement linéaire

L'exemple traité est de grande importance puisqu'il correspond au calcul des structures.

I.1.1 Formulation du problème aux limites

On considère un corps élastique occupant un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, soumis à une force volumique \underline{F}^d et à des résistances linéaires de type visqueux $-\mu \dot{\underline{u}}$, où μ est un facteur traduisant les propriétés du matériaux.

Sur le bord Γ de Ω , on considère deux types de conditions aux limites :

- déplacement imposé sur une partie du bord Γ_D , le déplacement étant donné : $\underline{u}_d = 0$;
- contrainte imposée sur une partie du bord Γ_N , le vecteur contrainte étant imposée : $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d$.

On cherche à déterminer le déplacement \underline{u} dû à ce chargement. La détermination du déplacement permet alors d'exprimer les déformations linéarisées $\underline{\varepsilon}$ et par suite les contraintes $\underline{\sigma}$ par le biais de la loi de comportement. En général, le matériau compris à l'intérieur des frontières peut être soumis à des déformations initiales. Si l'on note par $\underline{\varepsilon}_0$ de telles déformations, alors les contraintes proviennent de la différence entre les déformations réelles et les déformations initiales. Au départ, le corps peut également être soumis à des contraintes initiales résiduelles $\underline{\sigma}_0$. Dans le cas du comportement linéaire élastique, on obtient la relation $\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) + \underline{\sigma}_0$, avec $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenseur d'élasticité. Cependant, dans ce qui suit, on ne prendra pas en compte les contributions de contraintes et de déformations initiales.

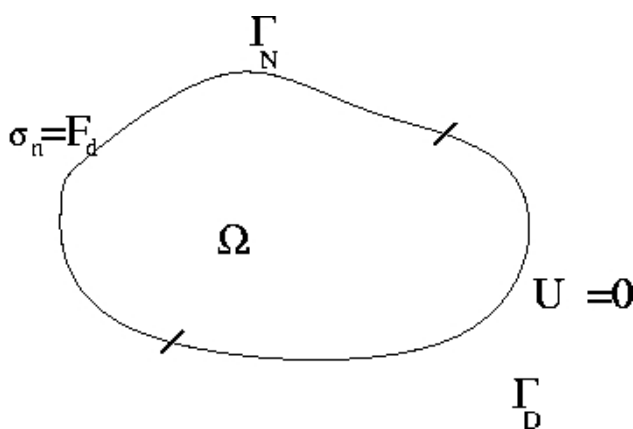


FIG. I.1 – Problème élastique aux conditions limites

Finalement, déterminer le déplacement $\underline{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ revient à résoudre le système d'équations suivant :

Problème (P)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \ddot{\underline{u}} + \mu \dot{\underline{u}} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}}_d & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{u}} = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{F}}_d & \text{sur } \Gamma_N \\ \underline{\underline{u}}(0) = \underline{\underline{u}}_0, \quad \dot{\underline{\underline{u}}}(0) = \dot{\underline{\underline{u}}}_0 & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{équation de la dynamique} \\ \text{loi de comportement} \\ \text{condition sur le bord} \\ \text{condition sur le bord} \\ \text{condition initiale} \end{array} \quad (\text{I.2})$$

où ρ est la masse volumique.

I.1.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème dynamique étudié s'obtient en suivant une démarche analogue à celle des problèmes statiques et découle de la somme des travaux intérieur et extérieur pour un déplacement virtuel quelconque $\delta \underline{\underline{u}}$ appliqué à la région Ω . On obtient :

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \mu \dot{\underline{\underline{u}}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \rho \ddot{\underline{\underline{u}}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{f}}_d - \int_{\Gamma_N} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{F}}_d d\Gamma = 0 \quad (\text{I.3})$$

pour tout $\delta \underline{\underline{u}}$ tel que $\delta \underline{\underline{u}} = 0$ sur Γ_D .

I.1.3 Discrétisation en éléments finis

On choisit d'approcher le déplacement par une discrétisation partielle.

Soit $\{\delta q\}^e$ un déplacement virtuel des nœuds : il provoque des déplacements à l'intérieur de l'élément Ω^e qui sont :

$$\delta \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}, t) = [N^e(\underline{\underline{X}})] \{\delta q^e(t)\} \quad (\text{I.4})$$

où $[N]$ définit les fonctions de forme pour le déplacement et $\underline{\underline{X}}$ les coordonnées de l'espace. Le déplacement provoque également des déformations que l'on traduit toujours par une relation qui peut être écrite sous forme matricielle :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{X}}, t) = [B^e(\underline{\underline{X}})] \{\delta q^e(t)\} \quad \text{avec } [B^e] = [L][N^e] \quad (\text{I.5})$$

expression dans laquelle $[L]$ désigne l'opérateur linéaire approprié et $[B^e]$ sont les fonctions de forme pour les déformations.

Le champ de déplacement est estimé à l'intérieur de chaque élément Ω_e d'un maillage, et à chaque instant, à partir des valeurs qu'il prend aux nœuds associés à cet élément au même instant. Son approximation est la suivante :

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}, t) = [N^e(\underline{\underline{X}})] \{q^e(t)\}. \quad (\text{I.6})$$

On en déduit la déformation :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{X}}, t) = [B^e(\underline{\underline{X}})] \{q^e(t)\}$$

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on omet la dépendance de \underline{X} et t . Cependant, il sera nécessaire de la garder à l'esprit. La loi de comportement permet d'exprimer le tenseur des contraintes approché :

$$\underline{\sigma} = \underline{\Lambda} : [B^e] \{q^e\}. \quad (\text{I.7})$$

Grâce aux relations (I.4)-(I.7), l'expression (I.3) permet d'établir :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega \right) \frac{d^2 \{q^e\}}{dt^2} + \left(\int_{\Omega^e} [N^e]^T \mu [N^e] d\Omega \right) \frac{d \{q^e\}}{dt} \\ & + \left(\int_{\Omega^e} [B^e]^T \underline{\Lambda} : [B^e] d\Omega \right) \{q^e\} - \left(\int_{\Omega^e} [N^e]^T \underline{f}_d d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_D} [N^e]^T \underline{F}_d d\Gamma \right) = 0. \end{aligned}$$

Cette relation ne diffère du cas stationnaire que par l'ajout des termes $\int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega$ et $\int_{\Omega^e} [N^e]^T \mu [N^e] d\Omega$. On définit ainsi les matrices élémentaires de masse $[M^e]$, d'amortissement $[C^e]$, de rigidité $[K^e]$ et le vecteur élémentaire $\{F^e\}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega & [C^e] &= \int_{\Omega^e} [N^e]^T \mu [N^e] d\Omega \\ [K^e] &= \int_{\Omega^e} [B^e]^T \underline{\Lambda} : [B^e] d\Omega & \{F^e\} &= - \int_{\Omega^e} [N^e]^T \underline{f}_d d\Omega - \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_D} [N^e]^T \underline{F}_d d\Gamma \end{aligned}$$

Enfin, l'assemblage des quantités élémentaires s'effectue de la même façon que dans le cas stationnaire et permet d'obtenir un système différentiel du second ordre par rapport au temps :

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} &= 0 \\ \{\dot{q}\} &\equiv \frac{d\{q\}}{dt} & \{\ddot{q}\} &\equiv \frac{d^2\{q\}}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

avec

$$\begin{aligned} [M] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [M^e] [A^e] & [C] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [C^e] [A^e] \\ [K] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [K^e] [A^e] & \{F\} &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T \{F^e\} \end{aligned}$$

$[A^e]$ représentant la matrice d'assemblage et m le nombre d'élément. $[M]$, $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$ sont les matrices globales de masse, d'amortissement, de rigidité et le vecteur global des forces.

Remarque

La détermination de la matrice $[C]$ est difficile étant donné le manque de connaissance concernant μ . Souvent, on écrira $[C]$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $[M]$ et $[K]$: $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$. Les paramètres α et β sont alors déterminés expérimentalement.

I.2 L'équation «quasi-harmonique»

I.2.1 Formulation générale

Dans ce qui suit, on s'intéresse à une catégorie particulière mais importante de problèmes physiques régis par l'équation générale «quasi-harmonique» avec dérivées partielles par rapport au temps. Les problèmes les plus fréquemment rencontrés par l'ingénieur sont par exemple : la conduction de chaleur, l'écoulement irrotationnel de fluide parfait, la répartition du potentiel électrique (ou magnétique).

La formulation développée dans ce paragraphe s'applique à tous ces problèmes.

De nombreux problèmes physiques concernent la diffusion ou l'écoulement d'une certaine quantité (chaleur, masse, produit chimique...). Le flux ou taux d'échange \underline{q} par unité de surface peut s'écrire à partir de ses composantes sous la forme :

$$\underline{q}^T = [q_x, q_y, q_z].$$

En général, les flux sont reliés directement au gradient d'un potentiel, Φ . On aura la relation :

$$\underline{q} = -\underline{k} \nabla \Phi,$$

où \underline{k} est une matrice trois par trois. Dans le cas d'un matériau orthotrope, la matrice \underline{k} est diagonale dans le repère préférentiel du matériau, et ses termes sont notés k_x, k_y, k_z .

Ainsi, dans le cas tridimensionnel, l'équation «quasi-harmonique» en fonction du potentiel ϕ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \left(Q - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (I.9)$$

ou sous forme compacte :

$$\nabla^T \cdot (\underline{k} \nabla \Phi) + r - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

Aux limites du domaine Ω , on rencontre deux types de conditions :

i) sur Γ_Φ :

$$\Phi = \bar{\Phi}.$$

On impose une valeur de ce potentiel égale à zéro par la suite.

ii) sur Γ : la composante normale du flux est donnée par :

$$q_n = \bar{q} + \alpha \Phi,$$

où \bar{q} et α sont des valeurs imposées.

Cette dernière condition s'écrit directement sous la forme :

$$-(\underline{k} \nabla \Phi)^T \cdot \underline{n} - \bar{q} - \alpha \Phi = 0,$$

\underline{n} étant le vecteur normal à la surface Γ .

I.2.2 Approximation par éléments finis

La résolution par éléments finis se fait de manière similaire à celle d'un problème en régime stationnaire. On considère alors un instant donné. Les dérivées de Φ par rapport au temps sont traitées comme des fonctions des coordonnées. On obtient la forme faible suivante :

$$\int_{\Omega} \delta\Phi \left\{ \underline{\nabla}^T \cdot (\underline{k}\underline{\nabla}\Phi) + r - \mu \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta\Phi \left\{ (\underline{k}\underline{\nabla}\Phi)^T \cdot \underline{n} - \bar{q} - \alpha\Phi \right\} d\Gamma = 0,$$

pour toute fonction $\delta\Phi$ nulle sur Γ_q .

Le théorème de la divergence permet d'établir :

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla}^T \cdot \delta\Phi (\underline{k}\underline{\nabla}\Phi) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\Phi \left\{ r - \mu \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta\Phi (\bar{q} + \alpha\Phi) d\Gamma = 0. \quad (\text{I.10})$$

Le potentiel Φ est estimé à l'intérieur de chaque élément du maillage Ω^e et à chaque instant de la manière suivante :

$$\Phi(\underline{X}, t) = \{N^e(\underline{X})\} \cdot \{q^e(t)\}$$

où $\{N^e(\underline{X})\}$ représente les fonctions de forme. En reportant cette approximation dans l'équation (I.10), il vient :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega^e} \{N^e\}^T \rho \{N^e\} d\Omega \right) \frac{d^2\{q^e\}}{dt^2} + \left(\int_{\Omega} \{N^e\}^T \mu \{N^e\} d\Omega \right) \frac{d\{q^e\}}{dt} \\ & + \left\{ \int_{\Omega^e} \{\nabla N^e\}^T [k] \{\nabla N^e\} d\Omega - \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_q} \{N^e\}^T \alpha \{N^e\} d\Gamma \right\} \{q^e\} \\ & - \left\{ \int_{\Omega^e} \{N^e\} r d\Omega + \int_{\Gamma_q \cap \Gamma^e} \{N^e\} \bar{q} d\Gamma \right\} = 0. \end{aligned}$$

On définit ainsi les matrices élémentaires par les relations :

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_{\Omega} \{N^e\}^T \rho \{N^e\} d\Omega \\ [C^e] &= \int_{\Omega} \{N^e\}^T \mu \{N^e\} d\Omega \\ [K^e] &= \int_{\Omega} \{\nabla N^e\}^T [k] \{\nabla N^e\} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \{N^e\}^T \alpha \{N^e\} d\Gamma \\ \{F^e\} &= - \left\{ \int_{\Omega} \{N^e\} r d\Omega + \int_{\Gamma_q} \{N^e\} \bar{q} d\Gamma \right\} \end{aligned}$$

Enfin, l'assemblage des quantités élémentaires s'effectue de la même façon que dans le cas stationnaire et permet d'obtenir un système différentiel du second ordre par rapport au temps :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0$$

avec bien entendu,

$$\begin{aligned}
 [M] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [M^e] [A^e] & [C] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [C^e] [A^e] \\
 [K] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [K^e] [A^e] & \{F\} &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T \{F^e\}
 \end{aligned}$$

Remarquons que les matrices obtenues sont symétriques.

I.2.3 Remarques :

- Si $\rho = 0$, l'équation (I.9) correspond à l'équation classique de la chaleur en régime transitoire. Cette même équation s'applique également à d'autres problèmes physiques comme la consolidation des sols...

- Si $\mu = 0$, l'équation (I.9) devient l'équation d'ondes d'Helmholtz. Quelques exemples de phénomènes étudiés à l'aide de cette équation : les ondes électromagnétiques, les ondes de surfaces d'un fluide...

- Si $\rho \neq \mu \neq 0$, il s'agit de l'équation des ondes non amorties dont le domaine d'application est vaste.

I.2.4 Application : l'équation de conduction de chaleur en régime transitoire

A titre d'application, nous étudions un problème de conduction thermique au sein d'un milieu isotrope en régime transitoire. La loi reliant la densité de flux de chaleur au champ de température est la loi de Fourier $\underline{\Phi} = \lambda \underline{\nabla} T$, où λ est la conductivité thermique. Nous utilisons une démarche analogue qui nous conduit à un système différentiel en temps, sur les températures.

Entre deux instants consécutifs, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dE + dU = dQ + dW,$$

- où dE doit être compris comme la transformation au sein du milieu d'énergie potentielle ; il s'agit de l'effet Joule ou de l'énergie calorifique résultant d'une réaction exothermique ou endothermique ;
- dU est la variation d'énergie interne ;
- dQ représente les échanges de chaleur aux frontières du système ; situé au sein du système siège d'un phénomène de conduction de la chaleur, ces échanges sont de type conductifs ;
- dW représente les échanges de travail aux frontières du système.

Pour un élément du milieu quelconque, suffisamment «petit» pour être homogène, de volume Ω , limité par une surface Γ , les équations de bilan sont les suivantes :

- r est la puissance calorifique volumique des sources internes, si bien que :

$$dE = \int_{\Omega} -rd\Omega$$

- Les évolutions du milieu, sauf cas particulier se font à pression constante $p = p_{ext}$,

$$dU - dW = dH = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega,$$

où $\partial T / \partial t$ est l'élévation de température par unité de temps, ρ la masse volumique et c la capacité massique à pression constante du milieu.

- Les échanges de chaleur aux frontières du milieu s'expriment, compte tenu de l'orientation de la normale \underline{n} , par la relation :

$$dQ = \int_{\Gamma} -\underline{\phi} \cdot \underline{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\phi}) d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}(\lambda \underline{\nabla} T) d\Omega.$$

L'application du premier principe de la thermodynamique conduit à l'équation indéfinie de la chaleur,

$$\text{div}(\lambda \underline{\nabla} T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -r \text{ en tout point de } \Omega.$$

Le solide est soumis aux conditions limites suivantes :

- un flux entrant Φ_d connu sur une partie Γ_q de la frontière Ω .
- une condition de température T_d connue sur une partie Γ_T de la frontière Ω .

Finalement le problème de conduction thermique en régime transitoire s'écrit :

Problème (\mathcal{P}') Trouver $T : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\lambda \underline{\nabla} T) + r - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ dans } \Omega & \text{équation indéfinie de la chaleur} \\ (\lambda \underline{\nabla} T) \cdot \underline{n} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_q & \text{condition sur le bord} \\ T = T_d \text{ sur } \Gamma_T & \text{condition sur le bord} \\ T(0) = T_0 & \text{condition initiale.} \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

Une démarche analogue à celle des équations «quasi-harmoniques» permet d'obtenir la formulation faible suivante :

Trouver T tel que $T = T_d$ sur Γ_T telle que :

$$\int_{\Omega} \delta T (r - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta T \Phi_d d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \delta T^T \cdot \lambda \underline{\nabla} T d\Omega = 0, \quad (\text{I.12})$$

pour toute fonction δT telle que $\delta T = 0$ sur Γ_T .

Le champ de température est estimé à l'intérieur de chaque élément Ω^e du maillage, et à chaque instant à partir des valeurs qui prend aux nœuds associés à cet élément à cet instant. La température

est approchée de la manière suivante :

$$T(\underline{X}, t) = \{N^e(\underline{X})\} \cdot \{T^e(t)\}.$$

L'application des approximations nodales dans le problème (I.12) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \{N^e\} r d\Omega - \left(\int_{\Omega^e} \rho c \{N^e\}^T \{N^e\} d\Omega \right) \{\dot{T}^e\} + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_q} \{N^e\} \Phi_d d\Gamma \\ & - \left(\int_{\Omega^e} (\nabla \underline{N}^e)^T \lambda \cdot \nabla \underline{N}^e d\Omega \right) \{T^e\} = 0. \end{aligned}$$

Cette relation ne diffère du cas stationnaire que par l'ajout d'un terme dû à la variation d'enthalpie $\int_{\Omega^e} \rho c \{N^e\}^T \{N^e\} d\Omega$. On définit ainsi la matrice d'inertie ou matrice de capacité calorifique ou de masse, élémentaire $[C^e]$, la matrice de conductivité $[K^e]$ et le second membre $\{F^e\}$:

$$\begin{aligned} [C^e] &= \int_{\Omega^e} \rho c \{N^e\}^T \{N^e\} d\Omega \\ [K^e] &= \int_{\Omega^e} (\nabla \{N\}^e)^T \cdot \lambda \cdot \nabla \{N\}^e d\Omega \\ \{F^e\} &= \int_{\Omega^e} \{N^e\} r d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_q} \{N^e\} \Phi_d d\Gamma \end{aligned}$$

Enfin, l'assemblage des quantités élémentaires s'effectue de la même façon que dans le cas stationnaire et permet d'établir un système différentiel du premier ordre par rapport au temps :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} + \{F\} = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} [C] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [C^e] [A^e] \\ [K] &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T [K^e] [A^e] \\ \{F\} &= \sum_{e=1}^m [A^e]^T \{F^e\} \end{aligned}$$

Chapitre II

MÉTHODES ANALYTIQUES DE RÉOLUTION

INTRODUCTION

Le chapitre précédent a mis en évidence le fait que, suite à une discrétisation partielle, différents problèmes dépendant du temps peuvent s'écrire comme un système d'équations différentielles dont la forme matricielle est donnée par la relation

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0. \quad (\text{II.1})$$

De manière générale, le système (II.1) peut être non linéaire. Pour les matrices de rigidité par exemple, la non-linéarité peut provenir de la loi de comportement, ou de la présence de grandes déformations... Dans ce qui suit, nous nous restreindrons à l'étude de systèmes d'équations différentielles linéaires. L'objectif de ce chapitre est de présenter différentes méthodes analytiques de résolution. Il faut noter cependant que de telles méthodes peuvent s'avérer complexes. Dans certains cas, on aura recours à un processus d'approximation (cf chapitre 3).

II.1 Classification générale

Bien que l'approche analytique soit souvent complexe, elle permet de donner un aperçu très utile à l'ingénieur.

La plupart des méthodes de résolution présentées dans ce cours ne sont qu'une extension des méthodes classiques utilisées pour la résolution des équations différentielles à coefficients constants.

Dans ce qui suit, nous allons traiter successivement les problèmes suivants :

- détermination d'une *réponse libre* : $\{F\} = \{0\}$;
- détermination d'une *réponse périodique* : $\{F\}$ périodique ;
- détermination d'une *réponse transitoire* : $\{F\}$ quelconque.

Dans les deux premiers cas, les conditions initiales du système n'ont aucune importance. On cherche à déterminer une solution générale. Dans le dernier cas, une attention particulière sera portée.

II.2 Les vibrations libres

II.2.1 Vibrations libres non amorties

En l'absence de termes d'amortissement et de force, le problème dynamique (II.1) se ramène au problème suivant :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0, \quad (\text{II.2})$$

dont la solution générale est

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t}. \quad (\text{II.3})$$

La partie réelle $\cos(\omega t)$ représente une réponse harmonique.

En injectant (II.3) dans (II.2), on montre que ω est solution du problème de valeurs propres suivant :

$$[K]\{\bar{q}\} = \omega^2 [M]\{\bar{q}\}. \quad (\text{II.4})$$

Le déterminant de l'équation (II.4) doit être nul

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (\text{II.5})$$

On obtient ainsi les n valeurs ω^2 (ω_i , $i = 1, \dots, n$) pour une dimension n des matrices $[K]$ et $[M]$.

La relation (II.5) ne permet pas de déterminer les véritables valeurs $\{q\}$. Cependant, on peut trouver n vecteurs $\{\bar{q}_j\}$ appelés modes propres du système dont la norme est $\{\bar{q}_j\}^T [M] \{\bar{q}_j\} = 1$.

La détermination des valeurs propres se fait rarement en cherchant les zéros de l'équation (II.5) en raison de la très grande taille du système dans le cas général, et des considérables différences d'ordre de grandeur entre les valeurs propres les plus grandes et les plus faibles. De toutes façons, ce sont les premières fréquences qui déterminent le comportement du système. Des méthodes permettant de trouver les premiers zéros d'un polynôme de degré n ont donc été mises au point. Du point de vue numérique, il existe un grand nombre de programmes disponibles permettant d'évaluer ces valeurs. L'objectif du cours n'étant pas de détailler ce type de méthode, nous présentons uniquement l'idée de départ.

Le point de départ de la majeure partie de ces méthodes consiste à écrire la relation (II.4) sous la forme suivante :

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (\text{II.6})$$

où $[H]$ est une matrice symétrique définie positive. Il est clair que si on écrit directement l'équation (II.4) sous la forme

$$[K]^{-1} [M] \{\bar{q}\} = \frac{1}{\omega^2} \{\bar{q}\}$$

où $[K]^{-1}$ est l'inverse de la matrice $[K]$, la propriété de symétrie n'est pas toujours conservée.

Par conséquent, il est nécessaire d'écrire la matrice $[K]$ en utilisant la décomposition de Cholesky. Ainsi,

$$[K] = [L]^T [L],$$

où l'exposant T désigne la transposée de la matrice $[L]$, matrice triangulaire inférieure.

Grâce à cette décomposition, (II.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} [M] \{\bar{q}\} &= \frac{1}{\omega^2} [L] [L]^T \{\bar{q}\}, \\ [L]^{-1} [M] \{\bar{q}\} &= \frac{1}{\omega^2} [L]^T \{\bar{q}\}, \\ [L]^{-1} [M] [L]^{-T} [L]^T \{\bar{q}\} &= \frac{1}{\omega^2} [L]^T \{\bar{q}\}. \end{aligned}$$

En posant $[H] = [L]^{-1} [M] [L]^{-T}$, $\{X\} = [L]^T \{\bar{q}\}$ et $\lambda = 1/\omega^2$, on se ramène à un problème de la forme (II.6) où $[H]$ est symétrique.

Après avoir déterminé λ , on cherche les modes propres $\{X\}$ desquels on déduit les modes propres $\{\bar{q}\}$ par la relation $\{\bar{q}\} = [L]^{-T} \{X\}$.

Remarques :

1) $[M]$ et $[K]$ sont définies positives :

Lorsque les matrices $[K]$ et $[M]$ sont définies positives (ce qui est le cas habituel des problèmes en dynamique des structures), il existe n valeurs propres réelles positives. Ces solutions sont appelées pulsations propres du système.

2) $[K]$ est singulière :

Si la matrice $[K]$ est singulière, elle ne possède pas d'inverse. Afin de pouvoir utiliser les méthodes générales précédentes, on utilise un artifice qui consiste à introduire un paramètre $\alpha \in \mathbf{R}^*$ du même ordre de grandeur que ω^2 . On a ainsi le problème suivant à résoudre :

$$([K] + \alpha [M]) \{\bar{q}\} = (\omega^2 + \alpha)[M] \{\bar{q}\}.$$

La nouvelle matrice $[K] + \alpha[M]$ est alors inversible et la solution cherchée est $\omega^2 + \alpha$.

II.2.2 Valeurs propres de problèmes du premier ordre

Le cas $[M] = 0$ représente l'expression de l'équation de conduction de chaleur. La relation (II.2) se ramène à :

$$[C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = 0. \quad (\text{II.7})$$

On cherche la solution générale sous la forme :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\omega t} \quad (\text{II.8})$$

En substituant la solution générale dans (II.7), on obtient un problème de valeurs propres :

$$(-\omega [C] + [K]) \{\bar{q}\} = 0.$$

Les matrices $[C]$ et $[K]$ étant souvent définies positives, ω est réelle positive. La solution présente un terme de décroissance exponentielle qui ne correspond pas réellement à un état de régime permanent.

II.2.3 Valeurs propres de problèmes du second ordre

A présent, on s'intéresse au problème (II.1) dans le cas d'une réponse libre. La solution générale de $[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0$ est de la forme $\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On obtient ainsi l'équation caractéristique :

$$(\alpha^2 [M] + \alpha [C] + [K]) \{\bar{q}\} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \{\bar{q}\} \in \mathbb{C}.$$

La partie réelle de la solution représente une vibration amortie. Ce problème est plus délicat à résoudre que les précédents si bien que la résolution explicite est peu courante.

II.3 Vibration périodique forcée

On considère une excitation périodique de la forme $\{F\} = \{\bar{F}\} e^{\alpha t}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$. La solution générale s'écrit $\{q\} = \{\bar{q}\} e^{\alpha t}$. En substituant cette solution dans l'équation (II.1), il vient :

$$\underbrace{(\alpha^2 [M] + \alpha [C] + [K])}_{[D]} \{\bar{q}\} = -\{\bar{F}\}$$

ce qui n'est pas un problème de valeurs propres. De façon formelle, ce problème peut être résolu comme un problème statique en inversant la matrice $[D]$. Néanmoins, la solution doit être déterminée en fonction de quantités complexes.

La décomposition suivante :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} &= e^{\alpha_1 t} (\cos(\alpha_2 t) + i \sin(\alpha_2 t)) & , \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2 \\ \{\bar{F}\} &= \{\bar{F}_1\} + i \{\bar{F}_2\} & , \{\bar{F}_i\} \in \mathbf{R}, \\ \{\bar{q}\} &= \{\bar{a}_1\} + i \{\bar{a}_2\} & , \{\bar{q}_i\} \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[M] + \alpha_1[C] + [K] & -2\alpha_1\alpha_2[M] - \alpha_2[C] \\ 2\alpha_1\alpha_2[M] + \alpha_2[C] & (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[M] + \alpha_1[C] + [K] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\bar{a}_1\} \\ \{\bar{a}_2\} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \{\bar{F}_1\} \\ \{\bar{F}_2\} \end{pmatrix}$$

dans lequel toutes les quantités sont réelles. Il est ainsi possible de déterminer la réponse à toute excitation périodique par résolution directe.

Pour une excitation périodique, la réponse après une phase transitoire initiale n'est plus influencée par les conditions initiales. La solution obtenue représente la réponse qui s'établit. Ceci est valable aussi bien pour les problèmes en dynamique des structures que pour les problèmes de conduction de chaleur.

II.4 Régimes transitoires

II.4.1 Introduction

Les différentes méthodes que nous avons présentées ne prennent pas en compte les conditions initiales du problème, ni la forme éventuelle non périodique des excitations. Or si on s'intéresse par exemple au comportement sismique des structures ou à l'évolution transitoire d'un problème de conduction de chaleur, il est essentiel de prendre en compte ces facteurs. Par conséquent, l'obtention de ces solutions nécessite soit l'utilisation d'une discrétisation dans le domaine temps, que nous étudierons en détail au prochain chapitre, soit l'utilisation de méthodes adaptées. Dans ce dernier cas, il existe deux méthodes importantes :

- la méthode de réponse en fréquence,
- la méthode d'analyse modale.

C'est cette dernière méthode qui fait l'objet du paragraphe suivant.

II.4.2 Décomposition modale

La méthode de décomposition modale est sans doute l'une des plus importante et des plus employée.

Nous allons étudier cette méthode dans le cas du problème général suivant :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} = 0, \quad \{F\} \text{ arbitraire.} \quad (\text{II.9})$$

En réponse libre, la solution s'écrit :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}_i\} e^{-\alpha_i t}$$

avec α_i valeurs propres et $\{\bar{q}_i\}$ vecteurs propres (cf paragraphe II.2.3).

Pour la réponse forcée, l'idée consiste à chercher la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres, c'est-à-dire :

$$\{q\} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}_i\} y_i(t), \quad (\text{II.10})$$

où la quantité $y_i(t)$ représente la contribution de chaque mode. En injectant (II.10) dans (II.9), puis en composant à gauche par $\{\bar{q}_i\}^T$, on obtient un ensemble d'équations scalaires indépendantes :

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0 \quad (\text{II.11})$$

dont les différents paramètres s'obtiennent grâce à l'orthogonalité des modes :

$$\begin{aligned} m_i &= \{\bar{q}_i\}^T [M] \{\bar{q}_i\} \\ c_i &= \{\bar{q}_i\}^T [C] \{\bar{q}_i\} \\ k_i &= \{\bar{q}_i\}^T [K] \{\bar{q}_i\} \\ F_i &= \{\bar{q}_i\}^T \{F\}. \end{aligned}$$

Les équations scalaires (II.11) se résolvent ensuite par des méthodes élémentaires indépendamment les unes des autres. Le vecteur total est ensuite obtenu par superposition en suivant (II.10). Dans le cas général, le calcul des valeurs et des vecteurs propres complexes est loin d'être facile. La méthode habituelle consiste à déterminer les valeurs propres réelles du problème

$$\omega^2 [M] \{\bar{q}\} = [K] \{\bar{q}\}. \quad (\text{II.12})$$

En utilisant ensuite le processus précédent, on montre que le problème est découpé en \underline{y} seulement si on a la propriété d'orthogonalité de $[C]$: $\{\bar{q}_i\}^T [C] \{\bar{q}_j\} = 0$. Ceci n'est pas vrai en général puisque les vecteurs propres assurent uniquement l'orthogonalité de $[M]$ et $[K]$. En revanche, si la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire des matrices $[M]$ et $[K]$, la propriété d'orthogonalité est évidemment satisfaite.

Dans la suite, on suppose que la propriété d'orthogonalité pour $[C]$ est satisfaite. L'équation (II.12) permet d'obtenir :

$$\omega_i^2 [M] \{\bar{q}_i\} = [K] \{\bar{q}_i\},$$

puis en multipliant à gauche par $\{\bar{q}_i\}^T$, il vient :

$$\omega_i^2 m_i = k_i.$$

En supposant que les modes sont normalisés de telle sorte que $m_i = 1$ et en posant $c_i = 2\omega_i^2 c'_i$, (où c'_i correspond au pourcentage d'amortissement par rapport à sa valeur critique) on montre que l'équation (II.11) s'écrit sous la forme d'une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i c'_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + F_i = 0$$

dont la solution générale est :

$$y_i = \int_0^t F_i e^{-c'_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_i (t-\tau) d\tau.$$

Une intégration numérique permet de déterminer une réponse. La superposition de ces termes donne la réponse transitoire totale (en principe !).

Remarque

1) Pour un système de premier ordre $[C] \dot{\{q\}} + [K] \{q\} + \{F\} = 0$, on peut développer des méthodes analogues. En utilisant la relation (II.8) et en procédant de manière similaire, on obtient un

ensemble d'équations découplées :

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0,$$

et cela permet de déterminer une solution analytique.

2) Le type de décomposition modale nécessite la détermination de l'ensemble des valeurs et des modes propres représentant des calculs considérables. D'un point de vue pratique, on ne prend en compte qu'un nombre limité de modes étant donné que les réponses à des fréquences élevées sont souvent très amorties et prennent par conséquent des valeurs négligeables.

Chapitre III

MÉTHODES DE RÉOLUTION PAR RÉCURRENCE

INTRODUCTION

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de problèmes transitoires. Nous revenons à une discrétisation par éléments finis à partir d'une fonction test. Malgré l'infinité du domaine temps, on divise l'intervalle de temps en sous-intervalles de longueur finie Δt . On présente uniquement des schémas de résolution à un pas pour des problèmes du premier et du second ordre. On obtient ainsi une relation par récurrence permettant de déterminer une solution approchée du problème. Enfin, on discute de la stabilité de ces schémas caractérisant la capacité d'un algorithme à amortir ou au contraire à amplifier les erreurs commises au cours des pas de temps successifs.

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les problèmes dynamiques ou les problèmes de champ en régime transitoire se formulent suite à une discrétisation partielle sous forme de systèmes d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} &= 0 \\ \{q(0)\} &= \{q_0\} \quad \{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}, \end{aligned} \tag{III.1}$$

pour les problèmes dynamiques ou

$$\begin{aligned} [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} &= 0, \\ \{q(0)\} &= \{q_0\} \end{aligned} \tag{III.2}$$

pour des problèmes de conduction de chaleur par exemple.

Malgré les diverses méthodes existantes, dont certaines ont fait l'objet du chapitre 2, la solution d'un tel problème reste souvent difficile à obtenir.

Dans ce chapitre, on revient à une discrétisation par éléments finis à partir d'une fonction test, appliquée maintenant au domaine temporel de manière générale. L'intervalle de temps est divisé en sous-intervalles de temps finis Δt . On définit ainsi la relation de récurrence $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ où l'instant t_n correspond à la condition initiale. Le calcul s'effectue de proche en proche en utilisant une suite de tels domaines avec de nouvelles conditions initiales. On parle de calcul *pas-à-pas* ou *par récurrence*. Nous allons voir que l'approche par éléments finis permet de retrouver des méthodes classiques, mais plus générales, obtenues à l'aide des différences finies ou de Runge-Kutta.

Les relations de récurrence sont écrites pour le système original. Cependant, lorsqu'il sera question de l'étude de stabilité des schémas, nous préférons la formulation en termes d'équations scalaires découplées :

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i$$

ou

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i,$$

avec y_i variable de participation modale, obtenue au paragraphe II.4.2.

III.2 Schémas à un pas pour les équations du premier ordre

III.2.1 Méthode du point milieu généralisée

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'obtention des relations de récurrence pour un problème du premier ordre (III.2).

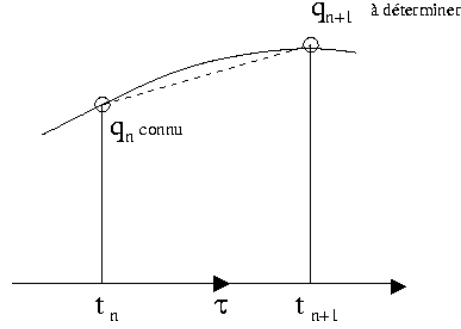
On considère un «élément» typique de temps de longueur Δt . Il s'agit de déterminer la valeur $\{q_{n+1}\}$ connaissant la valeur $\{q_n\}$ et le vecteur force $\{F\}$ sur l'intervalle Δt (figure III.2.1). Il est clair que pour le premier intervalle, la valeur initiale est $\{q_0\}$: on parle de *problème à valeur initiale*.

Dans chaque intervalle Δt , l'approximation de $\{q\}$ prend la forme linéaire suivante :

$$\{q\} \approx \{\hat{q}\} = \{q_n\} + \frac{\tau}{\Delta t} (\{q_{n+1}\} - \{q_n\}) \text{ avec } \tau = t - t_n.$$

Le problème variationnel s'écrit :

$$\int_0^{\Delta t} \{w(\tau)\}^T [[C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\}] d\tau = 0,$$


 FIG. III.1 – Approximation de $\{q\}$ dans le domaine temps.

où $\{w(\tau)\}$ sont des fonctions de poids arbitraires dont une approximation s'écrit :

$$\{w(\tau)\} = W(\tau) \{\delta q_{n+1}\}, \text{ avec } \{\delta q_{n+1}\} \text{ paramètre arbitraire.}$$

Cette dernière approximation permet d'établir :

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) [[C] \{\hat{q}\} + [K] \{\hat{q}\} + \{F\}] d\tau = 0. \quad (\text{III.3})$$

En posant

$$\theta = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau}$$

on peut écrire l'équation (III.3), quelle que soit la fonction de pondération, sous la forme :

$$\frac{1}{\Delta t} [C] (\{q_{n+1}\} - \{q_n\}) + [K] (\{q_n\} + \theta (\{q_{n+1}\} - \{q_n\})) + \{\bar{F}\} = 0, \quad (\text{III.4})$$

avec $\{\bar{F}\}$ une valeur moyenne de $\{F\}$ donnée par

$$\{\bar{F}\} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W \{F\} d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau} \quad \text{ou} \quad \{\bar{F}\} = \{F_n\} + \theta (\{F_{n+1}\} - \{F_n\}).$$

On adopte souvent la même interpolation pour $\{F\}$ et $\{q\}$

Il est intéressant de remarquer que la relation (III.4) correspond à une série classique de formules de différences finies à l'instant $t_n + \theta \Delta t$. La solution de (III.4) s'écrit

$$\{q_{n+1}\} = ([C] + \theta \Delta t [K])^{-1} [[C] - (1 - \theta) \Delta t [K]] \{q_n\} - \Delta t \{\bar{F}\}. \quad (\text{III.5})$$

On peut alors déterminer $\{q_{n+1}\}$ en résolvant les équations précédentes étant donné que les vecteurs $\{q_n\}$ et $\{F\}$ sont connus.

Remarques

- Si $\theta = 0$ et $[C]$ est diagonale, la solution est triviale. Ces procédures sont dites *explicites*.
 - Si $\theta \neq 0$, les procédures sont dites *implicites*.
 - Si $\theta = 1/2$, il retrouve de la formule classique de différence centrale (Cranck-Nicholson).
- La stabilité des ces schémas sera étudiée au paragraphe III.3.4.

III.2.2 Méthode des trapèzes généralisée

Une alternative à la méthode présentée au paragraphe III.2.1 consiste à approximer $\{q_{n+1}\}$ par une série de Taylor tronquée :

$$\{q_{n+1}\} \approx \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + \beta \Delta t (\{\dot{q}_{n+1}\} - \{\dot{q}_n\}), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (\text{III.6})$$

On suppose que l'équation gouvernant le problème est satisfaite à l'instant t_{n+1} . Ainsi :

$$[C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{F_{n+1}\} = 0 \quad (\text{III.7})$$

En remplaçant (III.6) dans l'expression ci-dessus, on obtient la relation de récurrence :

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = -([C] + \beta \Delta t [K])^{-1} [[K] (\{q_n\} + (1 - \beta) \Delta t \{\dot{q}_n\}) + \{F_{n+1}\}]. \quad (\text{III.8})$$

La résolution de l'équation précédente permet d'obtenir la valeur $\{\dot{q}_{n+1}\}$ puis de déduire $\{q_{n+1}\}$ grâce à la relation (III.6). Par la suite, pour faire référence à ce schéma, on parlera de *schéma à un pas «en temps»*.

III.2.3 Application au problème de conduction de chaleur

Pour illustrer ce formalisme, on reprend l'exemple étudié au paragraphe I.2.4. Suite à la discrétisation par éléments finis, nous avons obtenu le système d'équations différentielles suivant :

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} + \{F\} = 0,$$

où $[C]$ est la matrice de capacité calorifique, $[K]$ la matrice de conductivité et $\{F\}$ le vecteur second membre.

L'intégration temporelle permet d'obtenir l'évolution au cours du temps du vecteur des températures aux nœuds du maillage, et donc par approximation nodale la température et son gradient en tout point du solide. On résout ce problème pas à pas dans le temps. On peut par exemple utiliser un schéma aux différences finies implicite présenté au paragraphe III.2.1. Dans ce cas, la vitesse de variation de la température aux nœuds du maillage s'exprime :

$$\{\dot{T}_{n+1}\} = \frac{\{T_{n+1}\} - \{T_n\}}{\Delta t}.$$

Comme à l'instant t_n , les quantités $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$ sont connues, les températures nodales à l'instant t_{n+1} sont obtenues par la résolution du système linéaire suivant :

$$([C] + \Delta t [K]) \{T_{n+1}\} = \Delta t \{F\} + [C] \{T_n\}.$$

On part de la condition initiale $\{T(0)\}$ à $t = 0$. On estime à chaque instant par incréments successifs Δt la solution. La solution est approchée en espace par la méthode par éléments finis et en temps par la méthode des différences finies.

Ce problème pourrait être résolu avec d'autres méthodes : la méthode par décomposition modale vue au chapitre précédent ; des méthodes d'intégration directe dans le temps (méthode d'Euler explicite ou implicite, les méthodes semi-explicites, la méthode de Crank–Nicholson...).

III.2.4 Stabilité

La stabilité des schémas présentés précédemment est étudiée dans le cas où $\{F\} = 0$. La démarche proposée est toutefois applicable dans le cas où $\{F\} \neq 0$. De manière générale, ces schémas peuvent s'écrire sous la forme

$$\{q_{n+1}\} = [A] \{q_n\}, \quad (\text{III.9})$$

où $[A]$ est la matrice d'amplification.

En effet, en ce qui concerne le schéma à un pas présenté au paragraphe III.2.1, le résultat est immédiat et découle de la relation de récurrence :

$$\{q_{n+1}\} = ([C] + \theta\Delta t[K])^{-1}([C] - (1 - \theta)\Delta t[K]) \{q_n\},$$

avec

$$[A] = ([C] + \theta\Delta t[K])^{-1}([C] - (1 - \theta)\Delta t[K]).$$

Pour le schéma «en temps», l'approximation de $\{q_{n+1}\}$ s'écrit :

$$\{q_{n+1}\} = \{q_n\} + \Delta t(1 - \beta) \{\dot{q}_n\} + \beta\Delta t \{\dot{q}_{n+1}\}. \quad (\text{III.10})$$

D'après la relation (III.7), on a :

$$\forall j \in [N], \quad \{\dot{q}_j\} = -[C]^{-1}[K] \{q_j\}.$$

Ce qui permet d'écrire la relation (III.10) sous la forme :

$$\{q_{n+1}\} = ([I] + \beta\Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}([I] - \Delta t[C]^{-1}[K](1 - \beta)) \{q_n\}.$$

Par conséquent, la matrice d'amplification pour le schéma «en temps» est

$$[A] = ([I] + \beta\Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}([I] - \Delta t[C]^{-1}[K](1 - \beta)).$$

Dans les deux cas, une solution générale peut s'écrire

$$\{q_{n+1}\} = \mu \{q_n\}.$$

En remplaçant cette dernière relation dans (III.9), on constate que μ est valeur propre du problème ci-dessous :

$$([A] - \mu[I]) \{q_n\} = 0. \quad (\text{III.11})$$

Par conséquent, s'il existe une valeur propre telle que

$$|\mu| > 1,$$

la solution est instable. En revanche, si toutes les valeurs propres sont telles que $|\mu| < 1$, la solution est stable. Lorsque la valeur propre est complexe, $|\cdot|$ représente le module.

La détermination des valeurs propres du problème (III.11) étant lourde, il est commode pour établir le critère de stabilité de considérer le système d'équations découplées en fonction des variables y_i de participation modale. On traite ainsi l'ensemble d'équations scalaires pour un problème du premier ordre :

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i = 0. \quad (\text{III.12})$$

Le raisonnement étant identique pour les deux schémas, on détaille seulement l'obtention du critère de stabilité pour le premier schéma.

Si on applique la relation de récurrence (III.5) à la relation (III.12), on a

$$(c_i/\Delta t + k_i\theta)(y_i)_{n+1} + (-c_i/\Delta t + k_i(1-\theta))(y_i)_n = 0,$$

et en posant

$$(y_i)_{n+1} = A(y_i)_n, \quad (\text{III.13})$$

il vient

$$A(c_i/\Delta t + k_i\theta) + (-c_i/\Delta t + k_i(1-\theta)) = 0. \quad (\text{III.14})$$

L'expression ci-dessus met en évidence que si A est strictement supérieur à 1, on obtient une réponse sans borne. Le problème devient alors instable.

L'équation (III.13) appelée *équation caractéristique du processus de récurrence* donne :

$$A = \frac{1 - \Delta t k_i / c_i (1 - \theta)}{1 + \Delta t k_i / c_i \theta} \quad (\text{III.15})$$

On voit immédiatement que si

$$|A| < 1$$

le membre droit de (III.15) doit être supérieur à -1 . En posant $\omega_i = k_i/c_i$ valeur propre du mode i , cette condition s'écrit

$$\omega_i \Delta t (2\theta - 1) > -2.$$

Cette dernière relation est toujours satisfaite si $\theta \geq 1/2$. On parle de *stabilité inconditionnelle*.

Si $0 < \theta < 1/2$, la stabilité est conditionnelle et nécessite la condition

$$\omega_i \Delta t < \frac{2}{1 - 2\theta}.$$

D'autre part, si $A > 0$, la solution oscille. On déduit de (III.15) une condition de non-oscillation de la solution au cours du temps. Cette condition est :

$$\forall i, \quad \frac{1 - \Delta t \omega_i (1 - \theta)}{1 + \Delta t \omega_i \theta} \geq 0.$$

Cette relation est toujours satisfaite pour l'algorithme implicite d'Euler. Cet algorithme ne conduit jamais à une oscillation de la solution au cours du temps.

Les deux régimes de stabilité obtenus peuvent être visualisés sur la figure III.2.

Concernant le critère de stabilité pour le schéma «en temps», l'équation caractéristique du processus de récurrence s'écrit :

$$A = \frac{1 - \Delta t k_i / c_i (1 - \beta)}{1 + \Delta t k_i / c_i \beta}.$$

Cette relation étant semblable à (III.15), les résultats de stabilité sont identiques à ceux du premier schéma.

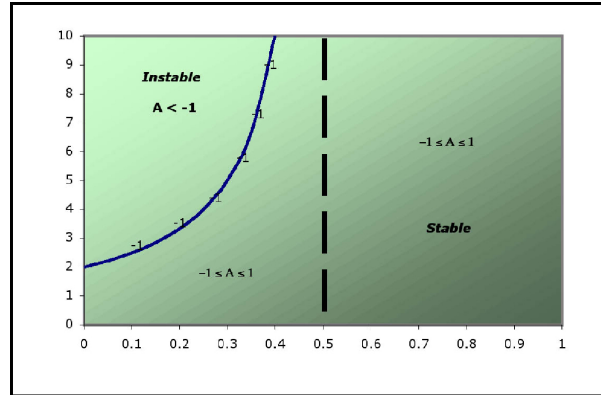


FIG. III.2 – Régimes de stabilité : axe des abscisses : θ , axe des ordonnées : $\omega\Delta t$.

En résumé, les résultats de stabilité pour les deux schémas présentés sont les suivants :

- stabilité conditionnelle pour $0 \leq \theta \leq 1/2$;
- stabilité inconditionnelle pour $\theta \geq 1/2$.

III.2.5 Valeur critique Δt

La détermination des critères de stabilité montre l'existence de valeurs critiques du pas de temps Δt (figure III.2.4). En effet, si $0 < \theta < 1/2$, le schéma est conditionnellement stable. Le pas de temps ne doit en aucun cas dépasser une valeur limite appelée pas critique de stabilité Δt_{crit} :

$$\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\theta)\omega_{max}} = \Delta t_{crit}$$

où ω_{max} est la plus grande valeur propre.

La condition de non-oscillation de la solution nécessite une valeur du pas de temps satisfaisant :

$$\Delta t \leq \frac{1}{(1 - \theta)\omega_{max}} = \Delta t_{osc}.$$

L'estimation des pas de temps critiques nécessite la résolution d'un problème de valeurs propres pour le système entier. En réalité, on ne procède pas ainsi. Un théorème important, proposé par Irons et Treharne, demande que la plus grande valeur propre d'un système soit toujours inférieure à la plus grande valeur propre associée à chaque élément.

$$\begin{aligned} \min_j \omega^2 &\geq \min_e \omega_e^2 \\ \max_j \omega^2 &\leq \max_e \omega_e^2 \end{aligned}$$

Ce théorème permet ainsi d'obtenir facilement une bonne estimation du pas de temps critique. Par conséquent, il existe une valeur critique du pas de temps Δt au-dessous de laquelle les méthodes, et en particulier les méthodes explicites $0 \leq \theta \leq 1/2$, présentent toujours une instabilité tant que le pas de temps utilisé dépasse la plus grande valeur propre du système.

Lors d'une simulation numérique, il est primordial de choisir un pas de temps convenable de telle sorte qu'il soit toujours inférieur aux deux valeurs limites Δt_{crit} et Δt_{osc} . Ce choix dépend

à la fois de l'algorithme d'intégration en temps choisi et plus précisément du paramètre θ et des caractéristiques du matériau (valeur propre de $[C]^{-1}[K]$) mais aussi du maillage de la structure.

Remarque :

Dans certain cas, par exemple pour des problèmes de choc thermique, si les termes de la matrice $[C]$ ne sont pas concentrés sur la diagonale, on montre que le pas de temps de la simulation doit rester supérieur à une certaine valeur Δt_s .

Application :

Illustrons cette notion de pas de temps critique à travers un exemple simple : le problème de conduction thermique à un degré de liberté avec un comportement uniaxial. On a pour un élément linéaire les relations suivantes :

$$N = \frac{h-x}{h} \quad C = c \int_0^h N^2 dx = \frac{ch}{3} \quad K = k \int_0^h \left(\frac{dN}{dx} \right)^2 dx = \frac{k}{h} \quad w = \frac{K}{C} = \frac{3k}{ch^2},$$

où h est la taille de l'élément. On obtient

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{1-2\theta} \frac{c}{3k} h^2$$

On note que pour les problèmes de premier ordre, le pas de temps critique est proportionnel à h^2 et diminue rapidement avec la taille de l'élément conduisant à des calculs difficiles.

III.3 Schémas à un pas pour les équations du premier ordre et second ordre

III.3.1 Introduction

Dans cette partie, on présente deux algorithmes applicables au système :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0. \quad (\text{III.16})$$

Bien évidemment, ces algorithmes sont valables pour des systèmes du premier ordre.

L'approximation de la quantité $\{q\}$ se fait par un polynôme de degré 2 pour les problèmes du second ordre et par un polynôme de degré 1 pour les problèmes du premier ordre.

Le premier algorithme nommé «SSpj» (schéma à un pas pour problèmes d'ordre j , approximation de $\{q\}$ de degré p) est obtenu à partir de la formulation faible. L'algorithme présenté au paragraphe III.2.1 n'est qu'un cas particulier. Dans la suite, on présente uniquement l'algorithme SS22 basique pour les problèmes dynamiques et l'algorithme SS11. Pour la généralisation de la méthode, on peut consulter l'ouvrage de Zienkiewicz.

Le second algorithme «GNpj» connu sous le nom d'algorithme de Newmark, utilise de la même manière qu'au paragraphe III.2.2, une approximation du paramètre $\{q\}$ en série de Taylor tronqué. Cet algorithme est très proche de l'algorithme SS et est présenté uniquement pour un problème du second ordre avec une approximation de $\{q\}$ du second ordre. Le cas général est détaillé dans

l'ouvrage de Zienkiewicz.

Enfin, on s'intéresse aux conditions de stabilité nécessitant l'écriture du problème sous forme d'un système différentiel scalaire obtenu au chapitre précédent (paragraphe II.4.2).

III.3.2 L'algorithme SSpj

L'algorithme SS22

On s'intéresse ici au système de second ordre (III.16). Les quantités $\{q_n\}$ et $\{\dot{q}_n\}$ étant connues à l'instant t_n , on a :

$$\tau = t - t_n \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n.$$

Le choix à la fois naturel et simple consiste à approximer $\{q\}$ de la manière suivante :

$$\{q\} = \{q_n\} + \tau \{\dot{q}_n\} + \frac{1}{2} \tau^2 \{\ddot{\alpha}_n\}, \quad (\text{III.17})$$

où $\{\ddot{\alpha}_n\} = \{\ddot{q}\}$ est inconnu (figure III.3.2).

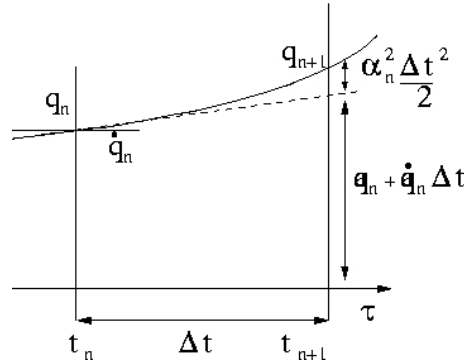


FIG. III.3 – Approximation de $\{q\}$ de second ordre.

En substituant l'approximation de $\{q\}$ dans l'équation (III.16) et en utilisant la formulation faible du problème, on obtient la relation de récurrence pour $\{\ddot{\alpha}_n\}$:

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) \left\{ [M] \{\ddot{\alpha}_n\} + [C] (\dot{q}_n + \tau \{\ddot{\alpha}_n\}) + [K] (\{q_n\} + \tau \{\dot{q}_n\} + \frac{1}{2} \tau^2 \{\ddot{\alpha}_n\}) + \{F\} \right\} dt = 0, \quad (\text{III.18})$$

où $W(\tau)$ est une fonction de poids.

En posant :

$$\theta_k = \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau^k d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{et} \quad \{\bar{F}\} = \frac{\int_0^{\Delta t} W \{F\} d\tau}{\int_0^{\Delta t} W d\tau},$$

l'équation (III.18) s'écrit de manière compacte :

$$[M] \{\ddot{\alpha}_n\} + [C] (\{\dot{q}_{n+1}\} + \theta_1 \Delta t \{\ddot{\alpha}_n\}) + [K] (\{q_{n+1}\} + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 \{\ddot{\alpha}_n\}) + \{\bar{F}\} = 0, \quad (\text{III.19})$$

soit

$$([M] + \theta_1 \Delta t [C] + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 [K]) \{\ddot{\alpha}_n\} + [C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{\bar{F}\} = 0, \quad (\text{III.20})$$

avec

$$\begin{aligned} \{q_{n+1}\} &= \{q_n\} + \theta_1 \Delta t \{\dot{q}_n\}, \\ \{\dot{q}_{n+1}\} &= \{\dot{q}_n\}. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Les valeurs $\{q_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$ étant connues, $\{\ddot{\alpha}_n\}$ est solution de :

$$\{\ddot{\alpha}_n\} = -([M] + \theta_1 \Delta t [C] + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 [K])^{-1} ([C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{\bar{F}\}). \quad (\text{III.22})$$

Notons que $\{q_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$ sont des prédictions des valeurs $\{q_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$ dans l'intervalle et satisfont l'équation (III.16) au sens faible pour $\{\ddot{\alpha}_n\} = 0$.

La méthode est à présent complète. Connaissant la valeur $\{\ddot{\alpha}_n\}$, il est possible de déterminer les quantités $\{q_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$ grâce à la relation (III.17). Il suffit de prendre $\tau = \Delta t$. Il vient :

$$\{q_{n+1}\} = \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\alpha}_n\} = \{\hat{q}_{n+1}\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\alpha}_n\} \quad (\text{III.23})$$

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \{\dot{q}_n\} + \Delta t \{\ddot{\alpha}_n\} = \{\dot{\hat{q}}_{n+1}\} + \Delta t \{\ddot{\alpha}_n\}.$$

Les quantités $\{\hat{q}_{n+1}\}$ et $\{\dot{\hat{q}}_{n+1}\}$ représentent les quantités prédites à l'instant t_{n+1} .

En résumé

L'algorithme SS22 nécessite le choix des paramètres θ_1 , θ_2 et demande à chaque pas de temps les calculs suivants :

- Calcul initiaux (prédiction)
 \implies détermination des valeurs $\{q_n\}$, $\{\dot{q}_n\}$ par les relations (III.21) ;
- Calcul de $\{\ddot{\alpha}_n\}$
 \implies résolution du problème (III.22) ;
- Calcul des valeurs $\{q_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$
 \implies résolution du problème (III.23).

Après ces calculs, un nouveau pas de temps peut débiter.

Remarques

- i) Lorsqu'on s'intéresse à un problème du premier ordre, le terme $\{\ddot{q}\}$ disparaît.
- ii) Lorsque les matrices $[M]$ et $[C]$ sont diagonales, la détermination de $\{\ddot{\alpha}_n\}$ est triviale pour $\theta_2 = 0$. Cependant, la méthode est explicite et nous verrons au paragraphe III.3.4 que cette méthode est conditionnellement stable.

L'algorithme SS11

On s'intéresse au cas particulier de l'algorithme SS11 qui est très souvent utilisé dans la pratique. Le raisonnement est similaire au précédent.

L'étude d'un problème du premier ordre montre que seule la valeur $\{q_n\}$ est nécessaire comme valeur initiale du calcul. L'approximation de $\{q\}$ est donc déterminée par la relation suivante :

$$\{q\} = \{q_n\} + \tau \{\alpha_n\} \quad \{\alpha_n\} = \frac{d\{q\}}{dt}, \quad \{\alpha_n\} \text{ inconnu}$$

et permet d'écrire le système (III.2) sous la forme

$$[C] \{\alpha_n\} + [K] (\{q_{n+1}\} + \theta \Delta t \{\alpha_n\}) + \{\bar{F}\} = 0,$$

avec $\{q_{n+1}\} = \{q_n\}$. Il en résulte que $\{\alpha_n\}$ est solution de :

$$\{\alpha_n\} = -([C] + \theta \Delta t [K])^{-1} ([K] \{q_{n+1}\} + \{\bar{F}\}).$$

Finalement, la valeur de $\{q_{n+1}\}$ est obtenue comme solution de

$$\{q_{n+1}\} = \{q_n\} + \Delta t \{\alpha_n\}.$$

III.3.3 L'algorithme de Newmark «GN22»

L'algorithme de Newmark est très proche de l'algorithme SS. La différence provient du choix de dérivation. Dans la dérivation, on suppose que les équations gouvernant le problème (III.16) sont satisfaites en fin de pas. On écrit :

$$[M] \{\ddot{q}_{n+1}\} + [C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{F_{n+1}\} = 0. \quad (\text{III.24})$$

On procède aux approximations de $\{q_{n+1}\}$ et $\{\dot{q}_{n+1}\}$ à l'aide d'un développement de série de Taylor tronqué :

$$\{q_{n+1}\} = \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - \beta_2) \{\ddot{q}_n\} + \beta_2 \{\ddot{q}_{n+1}\}) \quad (\text{III.25})$$

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \{\dot{q}_n\} + \Delta t ((1 - \beta_1) \{\ddot{q}_n\} + \beta_1 \{\ddot{q}_{n+1}\}).$$

Le principe de la méthode est le suivant : on injecte les relations de (III.25) dans (III.24). On obtient ainsi la valeur de $\{\ddot{q}_{n+1}\}$ permettant d'obtenir par la suite les valeurs $\{q_{n+1}\}$ et $\{\dot{q}_{n+1}\}$ par la relation (III.25).

A présent, appliquons ce principe. On écrit les relations (III.25) de manières équivalentes :

$$\begin{aligned} \{q_{n+1}\} &= \{\check{q}_{n+1}\} + \beta_2 \frac{\Delta t^2}{2} \{\check{q}_{n+1}\} \\ \{\dot{q}_{n+1}\} &= \{\check{\dot{q}}_{n+1}\} + \beta_1 \Delta t \{\check{q}_{n+1}\} \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

avec

$$\begin{aligned} \{\check{q}_{n+1}\} &= \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}_n\} \\ \{\check{\dot{q}}_{n+1}\} &= \{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_1) \Delta t \{\ddot{q}_n\}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

En substituant ces relations dans (III.24), on obtient

$$\{\ddot{q}_{n+1}\} = -([M] + \beta_1 \Delta t [C] + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 [K])^{-1} \{[C]\{\dot{q}_{n+1}\} + [K]\{\check{q}_{n+1}\} + \{F_{n+1}\}\}. \quad (\text{III.28})$$

A ce stade, on constate que la relation ci-dessus est similaire à la relation (III.22) de l'algorithme SS22 si on pose $\beta_2 = \theta_2$, $\beta_1 = \theta_1$. En revanche, les quantités $\{\check{q}_{n+1}\}$, $\{\check{q}_{n+1}\}$ ne sont pas égales aux quantités $\{\dot{q}_{n+1}\}$, $\{q_{n+1}\}$. Pour l'algorithme SS22 il s'agit de quantités prédites sur l'intervalle de temps Δt alors que pour l'algorithme GN22 les quantités sont prédites en fin de pas. La résolution de (III.28) permet d'obtenir la valeur $\{\dot{q}_{n+1}\}$, à partir de laquelle on obtient les valeurs de $\{q_{n+1}\}$ et $\{\check{q}_{n+1}\}$ par le biais de (III.26).

En résumé

L'algorithme GN22 nécessite le choix des paramètres β_1 et β_2 et demande à chaque pas de temps :

- Calcul initiaux (prédiction)
 \implies détermination des valeurs $\{\check{q}_{n+1}\}$, $\{\dot{q}_{n+1}\}$ par les relations (III.27) ;
- Calcul de $\{\ddot{q}_{n+1}\}$
 \implies résolution du problème (III.28) ;
- Calcul de $\{q_{n+1}\}$ et $\{\check{q}_{n+1}\}$
 \implies résolution du problème (III.25).

Remarque

Pour $\beta_2 = 0$, la méthode est explicite. Si $[K]$ et $[C]$ sont diagonales, alors la solution est triviale.

III.3.4 Stabilité

Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement à la stabilité de l'algorithme SS22. Il est possible d'établir les mêmes conditions pour l'algorithme GN22.

Avant de présenter les résultats de stabilité, il est intéressant de faire les remarques suivantes :

- question performance, les algorithmes SS22 et GN22 sont similaires ;
- les conditions de stabilité sont identiques pour $\beta_p = \theta_p$.

Pour des raisons pratiques, nous ne donnerons pas l'écriture explicite de la matrice d'amplification. On considère immédiatement le système d'équations différentielles scalaires résultant de la décomposition modale. Pour $F = 0$, l'équation est donnée par :

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0.$$

L'écriture scalaire des équations (III.20), (III.21) et (III.22) définit l'algorithme de récurrence. La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \mu q_n \\ \dot{q}_{n+1} &= \mu \dot{q}_n \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} m\alpha + c(\dot{q}_n + \theta_1\Delta t\alpha) + k(q_n + \Delta t\dot{q}_n + \frac{1}{2}\theta_2\Delta t^2\alpha) &= 0 \\ -\mu q_n + q_n + \Delta t\dot{q}_n + \frac{1}{2}\theta_2\Delta t^2\alpha &= 0 \\ -\mu\dot{q}_n + \dot{q}_n + \Delta t\ddot{q}_n + \theta_1\Delta t\alpha &= 0 \end{aligned}$$

avec $\alpha = \ddot{\alpha}_n$ On procède à une z transformation consistant à faire le changement de variable suivant :

$$\mu = \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On obtient le polynôme caractéristique :

$$c_0z^2 + c_1z + c_2 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} c_0 &= 4m + (4\theta_1 - 2)\Delta tc + 2(\theta_2 - \theta_1)\Delta t^2k \\ c_1 &= 2\Delta tc + (2\theta_1 - 1)\Delta t^2k \\ c_2 &= \Delta t^2k. \end{aligned}$$

Grâce à ce changement de variable, le système est stable si $Re(z) < 0$, Re désignant la partie réelle du nombre complexe.

D'après la condition de Routh-Hurwitz, toutes les racines ont leur partie réelle négative si

$$c_0 > 0 \quad c_1 \geq 0 \quad \det \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_0 & c_2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$c_0 > 0 \quad c_1 \geq 0 \quad c_2 > 0. \tag{III.29}$$

Ces inégalités donnent la condition de stabilité inconditionnelle :

$$\theta_2 \geq \theta_1 > \frac{1}{2},$$

qui reste valable lorsque $m = 0$.

La figure ci-dessous montre la stabilité de l'algorithme SS22.

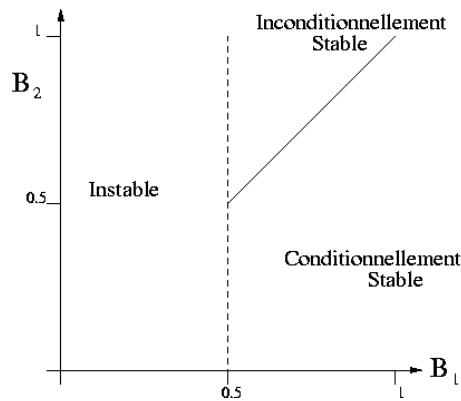


FIG. III.4 – Régime de stabilité de l'algorithme SS22.

Les propriétés de stabilité de l'algorithme SS22 sont très proche de celles de Newmark. En effet, pour $\theta_1 = \gamma$, $\theta_2 = 2\beta$ et $\theta_1 \geq \theta_2 \geq 1/2, \gamma$ et β étant les paramètres de Newmark, l'algorithme est

inconditionnellement stable. Pour $\theta_2 = 0$, l'algorithme est explicite et peut être conditionnellement stable si $\theta_1 \geq 1/2$.

III.3.5 Valeur critique Δt

La détermination des critères de stabilité montre l'existence de valeur critique de pas de temps. Lorsque la stabilité est conditionnelle et pour un choix $\theta_2 = 0$, l'inégalité (III.29) est vérifiée pour certaines valeurs de Δt :

$$\begin{aligned} 2m + (\theta_1 - 1)\Delta t c - \theta_1 \Delta t^2 k &\geq 0 \\ 2c + (2\theta_1 - 1)\Delta t k &\geq 0. \end{aligned}$$

La seconde relation est satisfaite si $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$.

Pour $\theta_1 = \frac{1}{2}$, la première relation implique :

$$\Delta t^2 \leq \frac{4m}{k} = (\Delta t_{crit})^2.$$

La relation ci-dessus montre qu'on ne peut avoir un schéma explicite pour la résolution d'un problème du premier ordre. Cependant si $\theta_1 > \frac{1}{2}$, on a

$$\Delta t < \frac{2\theta_1 - 1}{\theta_1} \frac{c}{k} = \Delta t_{crit}.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer au paragraphe III.2.5, lors d'une simulation numérique il est primordial de choisir un pas de temps convenable de telle sorte qu'il soit toujours inférieur aux valeurs limites Δt .

Application :

Considérons un problème dynamique élastique à un degré de liberté avec un comportement uniaxial. On a pour élément linéaire :

$$N = \frac{h-x}{h},$$

on a :

$$m = \int_0^h \rho N^2 dx = \rho \frac{h}{3} \quad k = E \int_0^h \left(\frac{dN}{dx} \right) dx = \frac{E}{h}.$$

Par conséquent, pour $\theta_1 = 1/2$, on a

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{C} = \Delta t_{crit}, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

La stabilité est donc gouvernée par le rapport entre la taille de l'élément h et la vitesse de propagation élastique C . Pour les problèmes dynamiques, le temps critique est proportionnel à h alors que pour les problèmes du premier ordre, il est proportionnel à h^2 .

Par conséquent, pour une taille de l'élément faible, les schémas explicites en dynamique sont plus efficaces que ceux pour l'analyse thermique.

Bibliographie

- J.-M. Bergheau and R. Fortunier. *Simulation numérique des transferts thermiques par éléments finis*. Lavoisier, 2004.
- G. Touzot G. Dhatt. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Malavoine, 1981.
- G. Dhatt J.L Batoz. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, 1991.
- R. L Taylor O.C. Zienkiewicz. *The finite element method*. Vol I-III, Butterworth-Heinemann, 2000.
- J.L Lions P.G Ciarlet. *Handbook of numerical analysis : Finite element methods (Part 1), Numerical method (Part 2)*. North Holland, 1995.