

1 Les méthodes mixtes

Thierry Coupez

Ecole des Mines, CEMEF, Sophia Antipolis

Fluides visqueux et problème de stokes

2 Formulation forte

2.1 Equations d'équilibre et d'incompressibilité

Soit Ω un domaine (un ouvert) dans \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) représentant le domaine occupé par un fluide considéré, dans un premier temps comme un fluide visqueux. L'équation d'équilibre s'écrit, en ne tenant pas compte des forces d'inertie:

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

où σ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy. Pour les fluides purement visqueux et incompressibles, on décompose généralement σ de la manière suivante:

$$\sigma = \tau - pI$$

où τ est le *déviateur des contraintes* ou *tenseur des extra-contraintes*, tandis que p est la pression et I l'identité. L'incompressibilité supposée du matériau impose que la divergence du champ de vitesse soit nulle c'est-à-dire:

$$\nabla \cdot u = 0$$

2.2 Lois de comportement

Les lois de comportement visqueuses relie le déviateur des contraintes au tenseur des vitesses de déformation (gradient symétrisé des vitesses):

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla^t u + \nabla u)$$

Elles ont la forme générale suivante:

$$\tau = 2 \eta(|\varepsilon(u)|) \varepsilon(u)$$

où $|\varepsilon(u)|$ désigne le second invariant du tenseur $\varepsilon(u)$ défini par:

$$|\varepsilon(u)| = \sqrt{\varepsilon(u) : \varepsilon(u)}$$

La viscosité η dépend donc de $|\varepsilon(u)|$ par l'intermédiaire de lois comme la loi puissance:

$$\eta = \eta_0 |\varepsilon(u)|^{m-1}$$

où m est l'indice de pseudoplasticité. Cette loi est principalement utilisée pour décrire la viscoplasticité des métaux à chaud. Une autre loi de comportement importante est la loi de Carreau-Yasuda qui s'écrit:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \lambda^n |\varepsilon(u)|^n\right)^{\frac{m-1}{n}}$$

qui permet de prendre en compte la présence d'un plateau newtonien à faible taux de cisaillement.

Ces différentes lois ne changent pas fondamentalement la nature mathématique des équations sous-jacentes. C'est pourquoi on parle souvent d'écoulement quasi-newtonien. Elles induisent bien une non-linéarité, mais qui peut être traitée de façon standard.

On va s'intéresser principalement à l'analyse du cas Newtonien $\tau = 2\eta \varepsilon(u)$, la viscosité η étant constante, et qui donne lieu au problème de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (2\eta \varepsilon(u)) - \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega$$

La condition au bord, $u = u^0$, (de type Dirichlet) nous permet de fermer simplement le système d'équations et d'écrire de façon simple les formulations qui suivent. Toutefois les conditions au bord peuvent être beaucoup plus complexes.

2.3 Conditions aux limites

La frontière du domaine peut être soumise à différentes conditions aux limites:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot n &= f && \text{sur } \Gamma_f \\ u &= u^0 && \text{sur } \Gamma_0 \end{aligned}$$

qui sont principalement de deux types : forces ou vitesse (déplacement en élasticité). Elles sont généralement mixtes, en force et en vitesse suivant les parties de la frontière, voire mixtes par composantes, une force étant imposée suivant une direction tandis que c'est la vitesse qui est imposée dans la ou les autres directions.

Par exemple, on peut vouloir prescrire un écoulement établi à l'entrée d'une géométrie en imposant simplement la pression amont. Les conditions sur Γ_E partie

frontière correspondant à l'entrée de l'écoulement sont alors une vitesse tangentielle nulle à la paroi et une contrainte normale proportionnelle à la pression c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} u - (u \cdot n)n &= 0 \\ \sigma \cdot n &= p_E n \end{aligned}$$

où n est la normale à Γ_E et p_E est une pression d'entrée donnée.

Il existe d'autres conditions aux limites conduisant à un système d'équations fermé (c'est-à-dire susceptible d'admettre une solution unique). La condition de contact unilatéral, par exemple, est une condition non linéaire, décrivant le contact entre solides et qui est utile notamment dans les problèmes de forgeage.

$$u \cdot \mu \partial h p \pi y b \partial t \pi p S \pi o R x \pi S \pi h d S y P q \pi t \pi p S \pi o R x \pi S \square$$

3 Formulation faible mixte à 2 champs

3.1 Forme variationnelle

On supposera dans ce qui suit des conditions aux limites de type Dirichlet sur toute la frontière c'est-à-dire $u = u^0$. Soit u et p solution du problème de Stokes tel que décrit ci-dessus. Soit w un champ de vitesse régulier quelconque

et s'annulant au bord et soit en...n q un champ de pression régulier quelconque. On construit une formulation variationnelle de façon classique de la manière suivante:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (2\eta \varepsilon(u)) - \nabla p) \cdot w & = 0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

En intégrant la première équation par partie (formule de Green-Riemann) et en supposant w nul au bord du domaine on obtient immédiatement:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(u) : \varepsilon(w) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w & = 0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

Ceci est vrai pour tout couple de fonctions vectorielles w et scalaires q régulières (dérivables et intégrables). La régularité des fonctions se décrit précisément par l'introduction de deux espaces vectoriels \mathcal{V} et \mathcal{P} , en notant \mathcal{V}^0 l'ensemble des éléments de \mathcal{V} s'annulant sur le bord de Ω .

3.2 Espaces fonctionnels

Pour étudier le problème de Stokes, on peut se ramener à des conditions homogènes en vitesse partout sur la frontière ($u = 0$ sur Γ). Le cas inhomogène ne pose pas de difficulté supplémentaire puisqu'il suffit d'effectuer un *relèvement des conditions aux limites essentielles* en posant: $u = u_0 + \delta u$ où u_0 est une fonction de \mathcal{V} satisfaisant les conditions aux limites prescrites tandis que δu s'annule au bord. Il suffit alors de résoudre pour δu .

Il faut tout de même faire attention à la régularité de u_0 qui joue en fait un rôle important dans la régularité de la solution.

La forme faible du problème de Stokes est alors la suivante:

Trouver $(u, p) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{P}$, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ tel que $\forall (w, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(u) : \varepsilon(w) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w = \int_{\Omega} f \cdot w \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ce problème est mathématiquement bien posé dans le cadre d'un choix strict et optimal des espaces fonctionnels (hilbertiens). On pose $\mathcal{V} = (H^1(\Omega))^d$ et alors $\mathcal{V}_0 = (H_0^1(\Omega))^d$ tandis que l'on prend $\mathcal{P} = L^2(\Omega)$. Rappelons que:

$$L^2(\Omega) = \left\{ q, \int_{\Omega} q^2 dV < \infty \right\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \nabla q \in (L^2(\Omega))^d \right\}$$

On utilisera de plus les notations suivantes pour désigner les normes et semi-normes habituelles:

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |u_j|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{k,\Omega} = \sum_{|m| \leq k} \sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial^{|m|} u_j}{\partial x_j^m} \right\|_{0,\Omega}$$

$$|u|_{k,\Omega} = \sum_{|m|=k} \sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial^{|m|} u_j}{\partial x_j^m} \right\|_{0,\Omega}$$

Dans le cas de condition aux bord non homogène (le cas standard) on supposera toujours qu'il existe un champ encore noté $v^0 \in \mathcal{V}$, tel que $\nabla \cdot v = 0$, défini sur tout le domaine et prenant la valeur prescrite sur le bord de celui-ci. Le problème précédant peut alors se réécrire précisément par:

Trouver $(v, p) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(v) : \varepsilon(w) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w & = - \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(v_0) : \varepsilon(w) \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot v & = 0 \end{cases} \quad \forall (w, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$$

En supposant qu'il existe v^0 très régulière, techniquement dans H^2 , on peut poser :

$$f = 2\eta \nabla \cdot \varepsilon(v_0)$$

On obtient bien le problème générique précédant:

Trouver $(v, p) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(v) : \varepsilon(w) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w & = \int_{\Omega} f \cdot w \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot v & = 0 \end{cases} \quad \forall (w, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$$

On peut limiter la régularité au bord à un champ v_0 simplement dans \mathcal{V} . On notera alors encore par f la forme linéaire associée au membre de droite définie uniquement dans $(H^{-1})^d$ par :

$$\langle f, w \rangle = - \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(v_0) : \varepsilon(w) .$$

On introduit dans la suite les formes bilinéaires suivantes définies dans $\mathcal{V} \times \mathcal{P}$:

$$a(u, w) = \int_{\Omega} 2\eta \varepsilon(v) : \varepsilon(w)$$

$$b(w, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot w$$

La forme faible du problème de Stokes avec conditions aux limites de type Dirichlet en vitesse est alors en toute généralité:

Pour $f \in \mathcal{V}'$ (le dual de \mathcal{V}) donné, trouver $(u, p) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$, tel que $\forall (w, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} a(u, w) + b(p, w) & = \langle f, w \rangle \\ b(q, u) & = 0 \end{cases}$$

- si $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$ (ses dérivées secondes existent et sont de carré sommable), alors (\mathbf{u}, p) est solution du problème de Stokes fort (sens usuel);
- Si $f \in (L^2(\Omega))^d$ alors $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$.

Ce résultat signifie que sous certaines hypothèses de régularité, les solutions des problèmes fort et faible sont les mêmes.

La méthode des éléments finis mixtes consiste alors à approcher les espaces \mathcal{V} et \mathcal{P} par des espaces de dimension finie. De plus, et c'est l'avantage de la formulation faible, cette approximation est interne, ce qui signifie que les espaces d'approximation sont généralement inclus dans \mathcal{V} et \mathcal{P} .

4 Formulation éléments finis mixtes

4.1 Approximations internes

Soit \mathcal{V}_h et \mathcal{P}_h deux espaces vectoriels de dimension finie que l'on construit pour approcher \mathcal{V} et \mathcal{P} . De façon rigoureuse, il faut considérer une famille $(\mathcal{V}_h, \mathcal{P}_h)$, l'indice h se rapportant à la taille des éléments du maillage sous-jacent. Cette famille sera dite une *approximation interne* des espaces $(\mathcal{V}, \mathcal{P})$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &\subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{V}_h &= \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{P}_h = \mathcal{P} \end{aligned}$$

On notera dans la suite π^h l'opérateur de projection de \mathcal{V} dans \mathcal{V}_h . Dans un espace vectoriel normé, il est défini de façon générale par :

$$\|u - \pi^h u\|_{\mathcal{V}_h} = \min_{w_h \in \mathcal{V}_h} \|u - w_h\|_{\mathcal{V}_h}$$

On notera encore π^h , bien qu'il puisse être différent, l'opérateur de projection de \mathcal{P} dans \mathcal{P}_h . Dire que la famille $(\mathcal{V}_h, \mathcal{P}_h)_h$ approche $(\mathcal{V}, \mathcal{P})$ revient à dire que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - \pi^h w\|_{\mathcal{V}_h} = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \|q - \pi^h q\|_{\mathcal{P}_h} = 0$$

$$\forall (w, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$$

Ceci ne dépend que de la construction des espaces d'approximations et non pas du problème à résoudre. C'est le cadre de la théorie de l'interpolation. Supposant que $(\mathcal{V}_h, \mathcal{P}_h)_h \subset (\mathcal{V}, \mathcal{P})$, on peut poser le problème suivant:

Trouver $(u_h, p_h) \in \mathcal{V}_{0h} \times \mathcal{P}_h$, tel que $\forall (w_h, q_h) \in \mathcal{V}_{0h} \times \mathcal{P}_h$:

$$\begin{cases} a(u_h, w_h) + b(p_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle \\ b(q_h, u_h) = 0 \end{cases}$$

Les espaces d'approximation étant de dimension finie cette formulation variationnelle mène à un système linéaire, facilement résoluble à condition qu'il soit inversible. Si c'est le cas, la question est de savoir dans quelle mesure (u_h, p_h) approche (u, p) . C'est l'objet de la théorie des méthodes mixtes qui a été établie progressivement ces vingt dernières années (voir par exemple Brezzi-Fortin [?]).

4.2 Problèmes elliptiques

Le problème de Stokes entre, tout au moins partiellement dans le cadre conventionnel des problèmes dits elliptiques (comme les problèmes d'élasticité linéaire). Rappelons la forme générale de ces problèmes:

Trouver $u_h \in \mathcal{V}_{0h}$, tel que $\forall (w) \in \mathcal{V}_{0h}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle \end{array} \right.$$

La démarche théorique consiste à établir le résultat suivant :

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}_h} \leq C \|u - \pi^h u\|_{\mathcal{V}_h}$$

ce qui est vrai dès que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite \mathcal{V} -elliptique (ou coercive):

$$a(v, v) > \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

ce qui est bien le cas de la forme associée au problème de Stokes. C'est le théorème de Lax Milgram.

Sous cette hypothèse de coercivité, vérifiée dans notre cas

puisque $a(\cdot, \cdot)$ ¹

4.3 Condition de compatibilité de Brezzi-Babůska

En plus de la \mathcal{V} –ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ garantie dans notre cas, le problème mixte nécessite une condition supplémentaire sur la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$:

$$\sup_{w \in \mathcal{V}, w \neq 0} \frac{b(q, w)}{\|w\|_{\mathcal{V}}} > \alpha \|q\|_{0, \Omega}$$

Cette condition assure l’existence et l’unicité de la solution du problème continu (faible). Elle est bien v ri e dans notre cas pour les espaces en question.

De façon analogue, elle doit être v ri e dans le cas discret, combinant les propriétés de la forme $b(\cdot, \cdot)$ et celles des espaces d’approximations:

$$\sup_{w_h \in \mathcal{V}_h, w_h \neq 0} \frac{b(q_h, w_h)}{\|w_h\|_{\mathcal{V}}} > \alpha_h \|q_h\|_{\mathcal{P}}$$

Mais ceci n'assure que l'existence et l'unicité de la solution discrète; il faut aussi la condition suivante (plus subtile et difficile à vérifier) :

$$\alpha_h > \alpha_0 > 0 \quad \forall h$$

Cette condition abstraite montre tout de même que les espaces d'approximation ne peuvent être choisis indépendamment. Le non respect de cette condition entraîne un certain nombre de comportements rédhibitoires des solutions

numériques, longtemps incompris d'une grande partie de la communauté numérique. Ces effets sont d'autant moins compris qu'une formulation mixte est sous-jacente à la plupart des méthodes d'éléments finis utilisées sans que les développeurs en aient réellement conscience. Parmi les effets dus au non respect de cette condition, on a notamment les pressions dites en damier (hourglass) et l'effet de verrouillage (locking).

Cette condition étant vérifiée, le couple (u_h, p_h) solution du problème discret approche bien la solution (u, p) du problème continu mais on ne peut pas découpler les majorations d'erreur en vitesse et en pression. Plus précisément on aura l'estimation suivante:

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} + \|p - p_h\|_{\mathcal{P}} \leq C \{ \|u - \pi_h u\|_{\mathcal{V}} + \|p - \pi_h p\|_{\mathcal{P}} \} \quad (2)$$

Ceci assure la convergence mais on va voir que la vitesse de convergence est alors dictée par la plus faible des interpolations.

5 Éléments finis mixtes compatibles

5.1 Description des espaces d'approximation

Les espaces d'approximation éléments finis sont construits à l'aide d'un maillage qui consiste en une décomposition du domaine Ω en un ensemble \mathcal{K} d'éléments

géométriques de forme simple.

$$\Omega = \bigcup_{\mathcal{K}} K$$

Sur chaque élément K on interpole la fonction à l'aide d'un polynôme de degré donné. Cette interpolation peut être entièrement déterminée par les valeurs aux noeuds de l'élément, partagées par les éléments voisins, elle est alors continue. Elle peut être indépendante d'un élément à l'autre; elle alors discontinue.

Considérons des simplexes (triangles et tétraèdres). A l'aide de ce type d'éléments, nous sommes capables de définir des espaces de fonctions continues d'un élément à l'autre et simplement polynomiales dans chaque élément:

$$S_h^{0,k} = \{w_h \in C^0(\Omega), w_h|_K \in P^k(K)\}$$

On peut aussi introduire des interpolations par fonctions discontinues:

$$S_h^{-1,k} = \{w_h \in L^2(\Omega), w_h|_K \in P^k(K)\}$$

où $P^k(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré k sur l'élément K .

L'ordre d'une famille d'éléments ...nis est donné par le plus grand degré des polynômes entièrement représentés. Par exemple un élément est d'ordre 2 si tous les monômes jusqu'à l'ordre 2 peuvent être représentés exactement.

Theorem 2 (Erreur d'interpolation) Si $w \in H^{k+1}(\Omega)$ et $\mathcal{V}_\zeta = \mathcal{S}_\zeta^{\uparrow -\infty, \|\cdot\|}$, pour $m = 0$ ou 1 , on a la borne suivante qui précise l'erreur d'interpolation commise a priori:

$$\|w - \pi_h w\|_{m,\Omega} \leq C |w|_{k+1,\Omega} h^{k+1-m}$$

On a vu que le problème de Stokes était bien posé dans $(H^1(\Omega))^d \times L^2(\Omega)$. Une approximation interne de ce problème est donc obtenue avec des fonctions continues en vitesse ($C^0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$) mais des fonctions qui peuvent être continues ou discontinues en pression.

De manière générale on utilise 2 types d'interpolation, qui diffèrent principalement par le choix de l'interpolation en pression qui sera continue ou discontinue, au choix. Dans tous les cas la construction d'éléments ...nis mixtes compatibles (vérifiant les conditions de Brezzi-Babuska) n'est pas naturelle. Par exemple on serait tenter de choisir une interpolation P^1 à la fois en vitesse et en pression ce qui ramènerait les inconnues du problème à $d + 1$ valeurs par sommet du

maillage (d composantes de la vitesse et 1 composante en pression). Cet élément ne «fonctionne» pas, les champs de pression obtenus ressemblant à un damier (checker-board ou hourglass). On peut aussi tenter de résoudre exactement l'équation de continuité sur chaque élément. Prenant une approximation de degré 1 (P_1) ($u_h \in (S_h^{0,1})^d$), $\nabla \cdot u_h|_K \in (P^0(K))$, et donc $\nabla \cdot u_h = 0$ dans chaque élément génère autant d'équations indépendantes qu'il y a d'éléments. Il y a deux fois plus de triangles que de sommets en dimension 2, tous les degrés de liberté en vitesse ne servent alors qu'à imposer l'incompressibilité. En dimension 3, la situation est encore pire puisqu'il y a 5 à 6 fois plus de tétraèdres que de sommets dans un maillage. On génère alors plus d'équations que d'inconnues...

En supposant $u_h \in (S_h^{0,1})^d$, imposer $\nabla \cdot u_h = 0$, sur chaque élément est équivalent à l'imposer en moyenne sur l'élément puisqu'il s'agit d'une constante sur chaque élément. Ceci revient exactement à une formulation mixte où la pression est une constante par élément:

$$\begin{aligned}
\forall u_h &\in (S_h^{0,1})^d, \\
\nabla \cdot u_h &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla \cdot u_h|_K = \mathbf{0}, \forall K \in \mathcal{K} \\
&\Leftrightarrow \int_K \nabla \cdot u_h = 0, \forall K \in \mathcal{K} \\
&\Leftrightarrow \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h dV = 0, \forall q_h \in S^{-1,0}
\end{aligned}$$

La forme mixte <<naturelle>> ne marche pas. De manière générale les formes mixtes "naturelles" consistent à choisir $u_h \in (S_h^{0,k})^d, p_h \in S_h^{-1,k-1}$, ce qui est strictement équivalent à imposer l'incompressibilité exacte sur l'élément. Ces formes mixtes naturelles ne marchent pas, elles conduisent à plus de contraintes que de degrés de liberté. Autrement dit, l'espace des pressions est trop riche. Une façon de remédier à cela est d'enrichir l'espace des vitesses. C'est ce que l'on fait par l'ajout de fonctions dites *bulles*.

5.2 Des bulles dans les éléments

Une fonction bulle est une fonction qui vaut l'unité au centre de l'élément et s'annule au bord de l'élément. Son support se limite donc à un seul élément. Elle peut être construite de façon polynômiale, par exemple dans le triangle de référence:

$$b(x, y) = 27 \times (1 - x - y) \times x \times y$$

ou dans le tétraèdre de référence:

$$b(x, y, z) = 256 \times (1 - x - y - z) \times x \times y \times z$$

On peut également linéariser la bulle par sous-éléments de manière à éviter l'emploi de bases polynômiales de degré trop élevé. De façon plus générale l'ensemble des fonctions bulles est défini pour un maillage donné par:

$$\mathcal{B}_h = \{b_h \in (H^1(\Omega))^d, b_h|_K \in (H_0^1(K))^d, \forall K \in \mathcal{K}\}$$

Les fonctions bulles en vitesse ont les propriétés suivantes:

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h = - \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot u_h$$

En rajoutant une bulle dans un élément ...ni classique, on l'aide à passer les conditions de stabilité sans réellement augmenter le coût de résolution. En effet les bulles à peine introduites sont immédiatement éliminées par un procédé de condensation.

Le critère suivant permet de mieux discerner les espaces d'approximation compatibles.

Theorem 3 (Le critère de M. Fortin) *Si pour une famille de deux espaces d'approximation \mathcal{V}_h et \mathcal{P}_h des espaces \mathcal{V} et \mathcal{P} , on peut construire pour tout champ w de \mathcal{V} une approximation $\pi_h^F w \in \mathcal{V}_h$ telle que:*

$$\int_{\Omega} q_h (\nabla \cdot \pi_h^F w - \nabla \cdot w) dV = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h \text{ et } |\pi_h^F(w)|_{\mathcal{V}} \leq C |w|_{\mathcal{V}} \quad (3)$$

où C est une constante indépendante de h , alors la condition de Brezzi-Babůska est vérifiée.

A l'aide de ce résultat on montre ci-dessous comment les fonctions bulles aident à construire un élément du premier ordre à pression continue, connu sous le nom d'élément MINI ($P^1 + /P^1$).

Soit $\mathcal{V}_h = (S_h^{0,1})^d + \mathcal{B}_h$ et $\mathcal{P}_h = S_h^{0,1}$. On note $\pi_h(w)$ la projection de w dans $(S_h^{0,1})^d$ et on admet que l'on peut construire $\pi_h(w)$ de sorte que $\pi_h(w) - w = 0$ sur $\partial\Omega$. On considère alors $v_h = \pi_h(w) + b_h$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q_h (\nabla \cdot v_h - \nabla \cdot w) &= - \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot (v_h - w) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot b_h \, dV - \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot (\pi_h(w) - w) \\ &= - \nabla q_h \cdot \int_{\Omega} b_h - \nabla q_h \cdot \int_{\Omega} (\pi_h(w) - w) \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir:

$$\int_{\Omega} b_h \, dV = - \int_{\Omega} (\pi_h(w) - w)$$

et de poser $\pi^F(w) = v_h$ pour que la condition énoncée soit vérifiée.

Ceci démontre que l'élément MINI est stable. Si maintenant on veut connaître la précision de cet élément, il suffit d'appliquer les estimations déjà données par la relation 2 (voir Fortin-Brezzi [?]):

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq C \{ \|u - \pi_h u\|_{1,\Omega} + \|p - \pi_h p\|_{0,\Omega} \} \\ &\leq C \{ h + h^2 \} = O(h) \end{aligned}$$

6 Quelques éléments stables

Les deux tableaux qui suivent permettent de comparer quelques éléments stables en dimension 2 et 3. Il ne s'agit que d'éléments mixtes dont les supports

géométriques sont des triangles ou des tétraèdres. On y indique le nombre de degrés de liberté en vitesse et pression par entité géométrique, ainsi que le nombre de degrés de liberté rapporté au nombre de noeuds d'un maillage régulier $N \times N$.

éléments 2D	ordre	sommets	arêtes	centre	$\tilde{\times} N$
MINI($P^1 + / P^1$)	1	3	0	2	3
Taylor-Hood(P^2 / P^1)	2	3	2	0	9
NC1(P_{nc}^1 / P^0)	1	0	2	1	6
Crouzeix-Raviart($P^2 + / P^1$)	2	2	2	5	8

éléments 3D	<i>ordre</i>	<i>sommets</i>	<i>arêtes</i>	<i>faces</i>	<i>centre</i>	$\tilde{\times} N$
$MINI(P^1 + /P^1)$	1	4	0	0	3	4
Taylor-Hood (P^2/P^1)	2	4	3	0	0	22
$R^1 + /P^1$	1	3	0	1	7	13
Crouzeix-Raviart $(P^2 + /P^1)$	2	3	3	1	7	31

Notons que les degrés de liberté en vitesse et pression peuvent être éliminés par différentes formes de condensation.