FAQ
Mécanique des milieux continus

1 Cinématique

1.1

Si $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ est un mouvement de rotation, alors $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$ est un tenseur antisymétrique représentant la vitesse de rotation correspondante. Vrai ou faux ?

□

Effectivement, comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}$ à chaque instant, on a

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}^T = 0 \Longrightarrow (\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T)^T = -\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$$

c'est dire que $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$ est un tenseur antisymétrique.

1.2

Le taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ représente la vitesse de rotation des directions principales du taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Vrai ou faux ?

□

Faux. Un contre–exemple est le glissement simple pour lequel le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ a toujours les mêmes directions principales à $\pm 45°$ de la direction de glissement. La vitesse de rotation des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est donc nulle. Pour autant, le taux de rotation du milieu $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ n'est pas nul. Son expression est calculée dès le deuxième chapitre du cours.

1.3

La vitesse de rotation propre $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T$ représente la vitesse de rotation des directions principales du taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Vrai ou faux ?

□

Faux. Un contre–exemple est à nouveau le glissement simple. La vitesse de rotation propre en glissement simple n'est pas nulle contrairement à la vitesse de rotation des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$.

1.4

Le taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ représente à chaque instant t la vitesse de rotation d'un trièdre de directions matérielles deux à deux orthogonales coïncidant à cet instant précis t avec les directions principales du taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Vrai ou faux ?

□

C'est vrai. Ce résultat constitue le théorème 2 du cours. Si le trièdre des fibres matérielles coïncidant à t avec les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ a une vitesse de rotation instantanée effectivement égale à $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$, ce ne sont en général plus ces mêmes directions matérielles qui coïncideront avec les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ à l'instant suivant.

2 Contraintes

2.1

A quel état de contraintes en un point matériel donné correspond la situation suivante : la contrainte normale à toute facette est nulle ?

☐

Il s'agit d'un état de contraintes nulles.
En considérant successivement 3 facettes normales à 3 directions principales deux à deux orthogonales, on établit que toutes les contraintes principales sont nulles.

2.2

A quel état de contraintes en un point matériel donné correspond la situation suivante : la contrainte tangentielle est nulle quelle que soit la facette considérée ?

☐

Il s'agit d'un état de contrainte hydrostatique pure.
En effet, en prenant $\underline{n} = \underline{e}_1$, la condition implique que $\underset{\sim}{\sigma}.\underline{e}_1$ soit purement normal à la facette considérée et donc colinéaire à $\underline{e}_1$. Par suite $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$.
On montre de même que $\sigma_{23} = 0$. Prenons alors $\underline{n} = [1 \quad 1 \quad 0]^T/\sqrt{2}$.
Le vecteur contrainte $[\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad 0]/\sqrt{2}$ doit être colinéaire à $\underline{n}$ précédent.
Cela implique que $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. On montre de même que $\sigma_{11} = \sigma_{33}$.

2.3

L'état de contrainte de cisaillement pur est strictement équivalent à un état de contraintes biaxiales de traction-compression. Vrai ou faux ?

☐

C'est vrai. L'état de cisaillement pur $[\underset{\sim}{\sigma}] = \sigma \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ admet pour contraintes principales $\tau, 0, -\tau$.
Cela correspond effectivement à un état biaxial de traction–compression selon les directions principales de $\underset{\sim}{\sigma}$ qui sont à $\pm 45°$ des directions de cisaillement.

2.4

Indiquer l'état de contrainte auquel correspond le tenseur suivant :

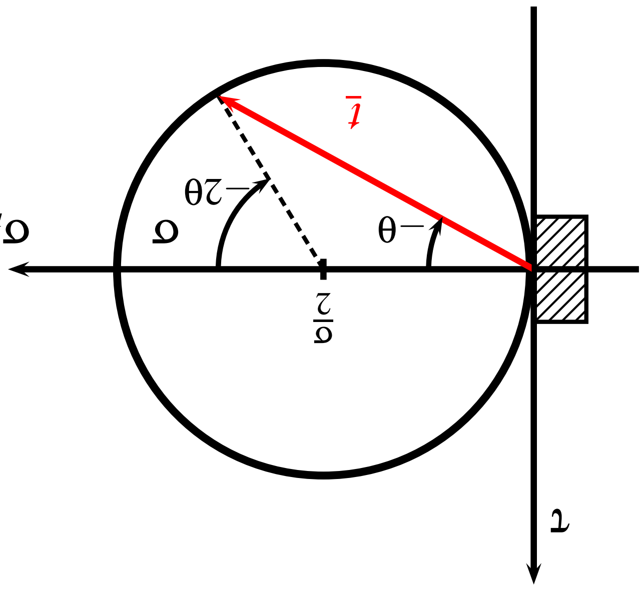
$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

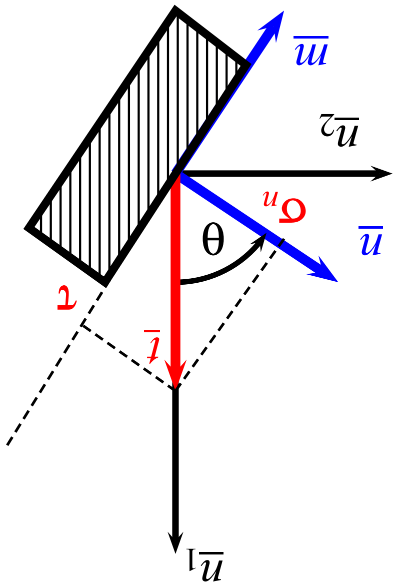
Il s'agit d'un état de traction simple de valeur 5σ.
En effet, la trace du tenseur est 5σ. Le fait que $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$ indique que le tenseur admet 0 comme valeur propre d'ordre 2. L'unique valeur propre non nulle est donc 5σ.
Il existe donc un repère dans lequel $[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 5\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ □

2.4.1

En traction simple de valeur σ, la contrainte tangentielle maximale vaut $\sigma/2$. Vrai ou faux ? Indiquer l'orientation de la facette pour laquelle la contrainte tangentielle est maximale.

La construction de Mohr pour la traction simple répond à la question : la contrainte normale maximale est σ et la contrainte tangentielle maximale est $\sigma/2$. Cette dernière est atteinte pour les facettes orientées à $\pm 45°$ par rapport à la direction de traction notée $\underline{\boldsymbol{n}}_1$ sur le dessin ci-dessus puisqu'il s'agit de la direction principale associée à la contrainte principale maximale.





Ces résultats peuvent se retrouver rapidement en introduisant le repère $(\underline{\boldsymbol{n}}, \underline{\boldsymbol{m}})$ constitué de la normale à la facette considérée et d'une direction tangentielle :
$\underline{\boldsymbol{n}} = \cos\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 - \sin\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_2, \quad \underline{\boldsymbol{m}} = -\sin\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 + \cos\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_2$
où θ désigne l'angle que fait le vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}$ avec la normale $\underline{\boldsymbol{n}}$.
Le tenseur des contraintes de traction simple s'écrit : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{n}}_1$
La contrainte normale et la contrainte tangentielle sont alors :
$\sigma_n = \underline{\boldsymbol{t}} . \underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{n}} . \tilde{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}} = \sigma (\underline{\boldsymbol{n}}_1 . \underline{\boldsymbol{n}})^2 = \sigma \cos^2\theta$
$\tau = \underline{\boldsymbol{t}} . \underline{\boldsymbol{m}} = \underline{\boldsymbol{m}} . \tilde{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}} = \sigma\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 . \underline{\boldsymbol{n}}\; \underline{\boldsymbol{n}}_1 . \underline{\boldsymbol{m}} = -\sigma \sin\theta \cos\theta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$ □