Relations fondamentales de la dynamique des milieux continus déformables

Lois universelles de la physique des milieux continus

- conservation de la masse
- bilan de quantité de mouvement
- bilan de moment cinétique
- bilan d'énergie
- bilan d'entropie

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Masse

On suit un ensemble de particules de masse dm contenue initialement dans le volume dV en $\underline{\mathbf{X}} \in \Omega_0$

$$dm = \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\, dV$$

champ de masse volumique initiale.
L'élément de volume dV devient dv en $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega_t$ à l'instant t mais la masse contenue dans dv est la même, par définition du point matériel

$$dm = \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv$$

$$dm = \rho_0(\underline{\mathbf{X}})dV = \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv = Constante$$

masse totale

$$m(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\, dV = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv$$

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Vitesses

- Vitesse d'une particule en mouvement

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) := \frac{d}{dt}\Phi(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

représentation matérielle/lagrangienne de la vitesse

Vitesses

- Vitesse d'une particule en mouvement

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) := \frac{d}{dt}\Phi(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

  représentation matérielle/lagrangienne de la vitesse
- C'est aussi la vitesse instantanée de la particule se trouvant à la position $\underline{\mathbf{x}}$ à l'instant t

$$\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) := \underline{\mathbf{V}}(\Phi^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t), t)$$

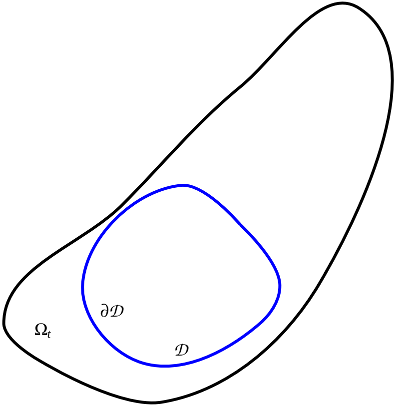
  représentation spatiale/eulérienne de la vitesse

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Quantité de mouvement

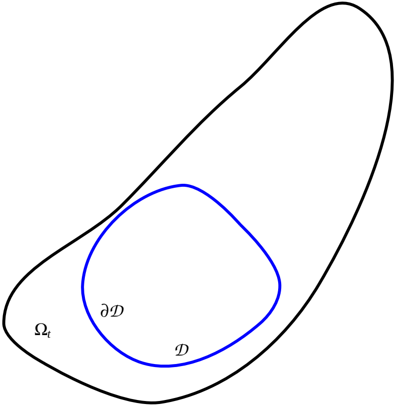
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv =$$

Quantité de mouvement

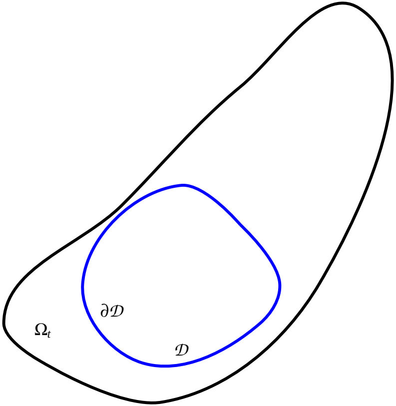
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\underline{\mathbf{v}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\mathbf{v}}\,(\Phi(\underline{\mathbf{X}}\,, t), t)\, dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\mathbf{V}}\,(\underline{\mathbf{X}}\,, t)\, dV\end{aligned}$$

Quantité d'accélération

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t

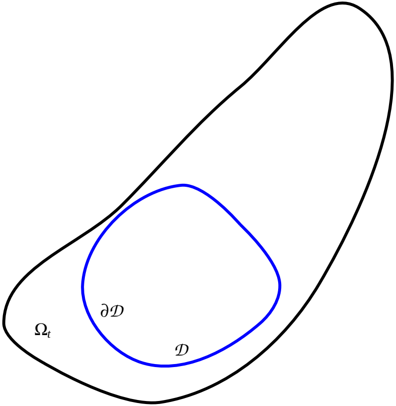


$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t)\, dV
\end{aligned}$$

En l'absence de discontinuités,

Quantité d'accélération

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv \\ &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t)\, dV \end{aligned}$$

En l'absence de discontinuités

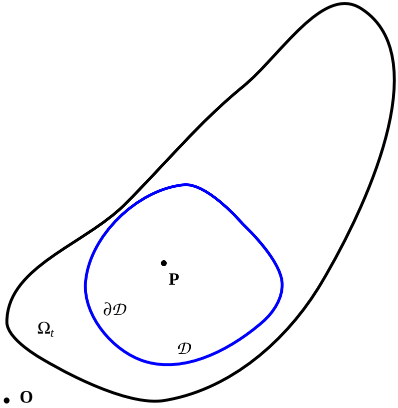
$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\frac{d\underline{\mathbf{V}}}{dt}(\underline{\mathbf{X}}, t)\, dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\frac{\partial\underline{\mathbf{V}}}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t)\, dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}})\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{X}}, t)\, dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv \end{aligned}$$

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Moment cinétique

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$

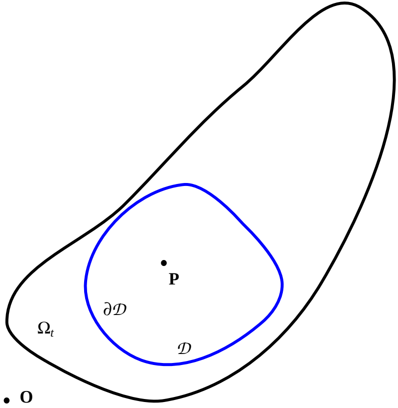


$$\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\underline{\mathbf{v}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv$$

$$\underline{\mathbf{OP}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_{\,O}$$

Moment dynamique

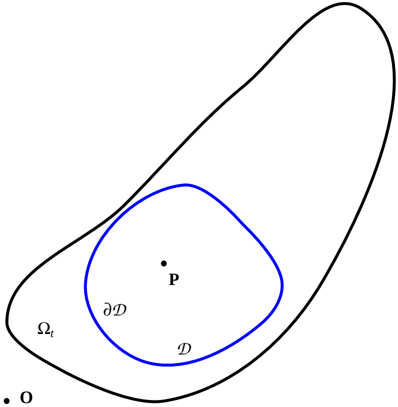
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$



$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}\,,\,t)\underline{\mathbf{v}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,,\,t)\,dv$$

Torseur dynamique

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$



torseur dynamique pour le domaine $\mathcal{D}_t$:

$$\{O, \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv, \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv\}$$

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique

2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport

3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Relation fondamentale de la dynamique des milieux continus

Torseur dynamique = Torseur des efforts appliqués (référentiel galiléen)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{v}}\ dv = \underline{\mathbf{R}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{v}}\ dv = \underline{\mathbf{M}}_O$$

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Un théorème de transport

$f(\underline{\mathbf{x}}, t)$ fonction tensorielle sur Ω_t **continue** dans sa représentation spatiale/eulérienne, dérivable/t, $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un domaine **matériel**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) f(\underline{\mathbf{x}}, t)\, dv =$$

Un théorème de transport

$f(\underline{\mathbf{x}}\,, t)$ fonction tensorielle sur Ω_t **continue** dans sa représentation spatiale/eulérienne, dérivable/t, $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un domaine **matériel**

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t) f(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t) dv \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} F(\underline{\mathbf{X}}\,, t)\rho_0(\underline{\mathbf{X}}\,) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} \frac{d}{dt}(F(\underline{\mathbf{X}}\,, t))\rho_0(\underline{\mathbf{X}}\,) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \dot{f}(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t) dv
\end{aligned}
$$

$F(\underline{\mathbf{X}}\,, t) := f(\Phi(\underline{\mathbf{X}}\,, t), t)$
dérivée particulaire ou en suivant le mouvement :

$$
\frac{d}{dt} F(\underline{\mathbf{X}}\,, t) = \frac{d}{dt} f(\Phi(\underline{\mathbf{X}}\,, t), t) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{x}}} . \underline{\mathbf{v}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}(\underline{\mathbf{x}}\,, t)
$$

Un théorème de transport

Formellement, pour un domaine **matériel** $\mathcal{D}_t$, on "dérive sous le signe somme" (grâce à la conservation de la masse)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho f \, dv = \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f}\rho dv + f \overbrace{\rho dv}^{\bullet}) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \dot{f} \, dv$$

autres formules de transports plus générales (Reynolds...)
Application au moment dynamique (en l'absence de discontinuités...)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{a}} \, dv$$

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Champs de forces

Il existe une

- une **densité massique** $\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\mathbf{x}}\,, t\right)$ de forces

$$\underline{\mathbf{R}}^{\,dist} = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\mathbf{x}}\,, t\right) dv$$

  Exemple : accélération de la pesanteur (unité $\mathrm{N.kg}^{-1} \equiv \mathrm{m.s}^{-2}$)

$$\underline{\mathbf{f}} := \underline{\mathbf{g}}$$

  hypothèse simplificatrice : $\underline{\mathbf{f}}$ ne dépend pas du domaine $\mathcal{D}_t$

Champs de forces

Il existe une

- une **densité massique** $\underline{\mathbf{f}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)$ de forces

$$\underline{\mathbf{R}}^{\,dist} = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{f}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv$$

  Exemple : accélération de la pesanteur (unité $\mathrm{N.kg}^{-1} \equiv \mathrm{m.s}^{-2}$)

$$\underline{\mathbf{f}} := \underline{\mathbf{g}}$$

  hypothèse simplificatrice : $\underline{\mathbf{f}}$ ne dépend pas du domaine $\mathcal{D}_t$

- une **densité massique** de couples

$$\underline{\mathbf{M}}_{O}^{dist} = \int_{\mathcal{D}_t} (\underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{f}} + \rho \underline{\mathbf{m}})\, dv$$

  i.e. le moment des forces volumiques + des couples volumiques intrinsèques (électromagnétisme)
  simplification : $\underline{\mathbf{m}} = 0$

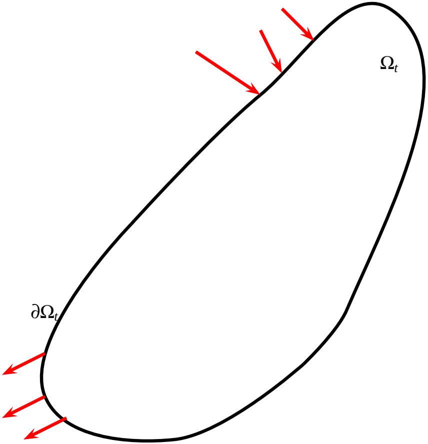
Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique

2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport

3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Efforts surfaciques

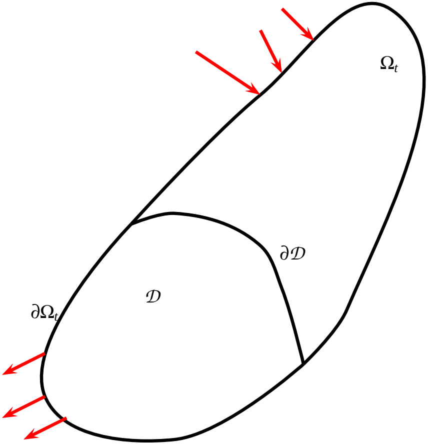


- efforts de contact sur $\partial\Omega_t$

  $$\underline{\mathbf{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\Omega_t, t)\, ds$$

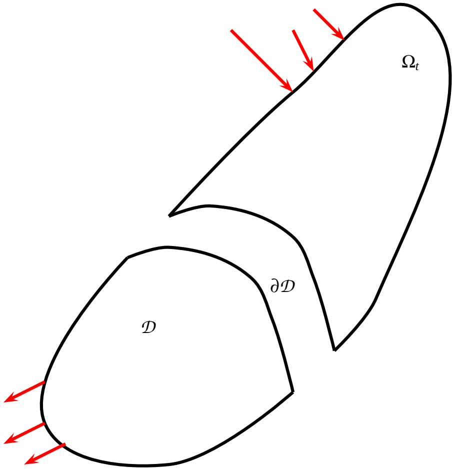
  vecteur densité surfacique de forces / vecteur–contrainte (unité N.m^{-2})

Efforts surfaciques



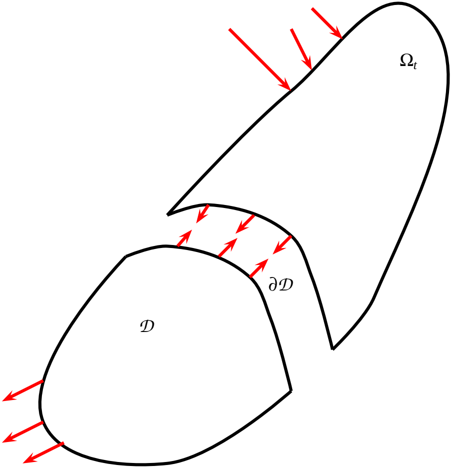
- efforts sur $\partial\mathcal{D}_t$?

Efforts surfaciques



- efforts sur $\partial\mathcal{D}_t$?

Efforts surfaciques



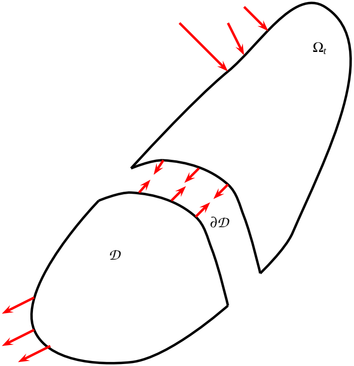
- efforts surfaciques sur $\partial\mathcal{D}_t$

  $$\underline{\mathbf{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

  Le pari de remplacer les efforts de champ à courte distance par des efforts surfaciques

- remplacer une action **non locale** par une action locale;
  en pratique,
  décroissance rapide des **forces de cohésion** ($\sim$ 10 atomes)

Efforts surfaciques



- densité surfacique de forces

$$\underline{\mathbf{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

- densité surfacique de couples

$$\underline{\mathbf{M}}_{\,O}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_{\,O}) \wedge \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

hypothèse : pas de densité surfacique de couples intrinsèque (milieu **non polaire**)

Plan

1. Quantité de mouvement, moment cinétique
   - Conservation de la masse
   - Champ de vitesses
   - Quantités de mouvement et d'accélération
   - Moments cinétique et dynamique
2. Equations de bilan global de la dynamique des milieux continus
   - Torseur dynamique = Torseur des efforts extérieurs
   - Un théorème de transport
3. Représentation des efforts
   - Efforts volumiques
   - Efforts surfaciques et de cohésion
   - Lois d'Euler du mouvement

Lois d'Euler du mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \underline{\mathbf{v}}\; dv = \underline{\mathbf{R}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{v}}\; dv = \underline{\mathbf{M}}_0$$

Lois d'Euler du mouvement

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\underline{\mathbf{v}}\, dv &= \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\underline{\mathbf{f}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\Omega_t, t)\, ds \\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho\underline{\mathbf{v}}\, dv &= \int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\underline{\mathbf{f}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, t)\, dv \\
&+ \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \underline{\mathbf{t}}\,(\underline{\mathbf{x}}\,, \partial\Omega_t, t)\, ds
\end{aligned}
$$

- Elles s'appliquent à tout sous–domaine $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$.
- On a besoin des deux équations!
- Référentiel non galiléen : mettre les forces d'inertie dans $\underline{\mathbf{f}}$