

# Effet bilame et mécanique des microsystèmes

Les composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents sont très fréquents dans les systèmes électromécaniques ou microélectroniques. La connaissance de leurs propriétés mécaniques est essentielle afin de leur garantir une durée de vie suffisante et d'éviter l'apparition de défauts. Ces composants sont souvent le siège de contraintes d'origine thermique dues à la différence de propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés. On envisage ici le cas élémentaire du bilame constitué de deux couches possédant des coefficients de dilatation distincts. L'objet du problème est de mettre en évidence l'effet bilame de manière quantitative et d'en déduire ensuite quelques conséquences dans le domaine des composants électroniques (microprocesseurs, etc.).

## 1 Comportement d'un bicouche

On considère une plaque composée de deux couches de matériaux différents. La géométrie de la plaque est engendrée par translation le long d'un axe  $OX_3$  à partir d'une surface plane  $S$  dont le contour extérieur est de forme quelconque. L'épaisseur de la plaque obtenue est supposée significativement plus petite que les deux autres dimensions caractéristiques.

Le repérage est cartésien orthonormé. Une vue en perspective et une section  $OX_1OX_3$  du bicouche font l'objet de la figure 1. La couche inférieure constitue le substrat, d'épaisseur  $h_s$ . Il est recouvert d'une couche ou film d'épaisseur  $h_f$ . L'épaisseur totale de la plaque est  $h = h_s + h_f$ . Conformément au système de coordonnées cartésiennes indiqué sur la figure 1, l'interface entre les deux matériaux est à la cote  $X_3 = 0$ . L'origine  $O$  du repère est un point de l'interface situé loin des bords de la plaque. La surface inférieure  $S$ , la surface supérieure et l'interface ont pour équations respectives  $X_3 = -h_s$ ,  $X_3 = h_f$  et  $X_3 = 0$ . Le domaine d'espace occupé par la plaque peut donc être noté  $S \times ]-h_s, h_f[$ . On notera  $\partial S$  la ligne du bord de  $S$  et  $\partial S \times ]-h_s, h_f[$  la surface latérale de la plaque.

L'interface est supposée parfaite<sup>1</sup>, c'est-à-dire que, dans les conditions de chargement du problème, aucune décohésion ni fissure ne peuvent apparaître à l'interface.

Le substrat est constitué d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young  $E_s$ , coefficient de Poisson  $\nu_s$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha_s$ ). La couche supérieure est constituée d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young  $E_f$ , coefficient de Poisson  $\nu_f$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha_f$ ). Chaque matériau est supposé dans son état naturel lorsqu'il est à la température de référence  $T_0$ .

L'objectif du problème est de déterminer la forme que prend le bicouche lorsqu'on le porte à la température  $T$ , supposée telle que l'on reste dans le contexte infinitésimal. Dans tout le problème, on se place délibérément dans l'hypothèse des petites perturbations.

On adopte l'approche en contraintes et l'on recherche si un champ de contraintes internes biaxiales de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^s = \sigma_{11}^s(X_3)\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \sigma_{22}^s(X_3)\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 \quad \text{pour} \quad -h_s < X_3 < 0 \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^f = \sigma_{11}^f(X_3)\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \sigma_{22}^f(X_3)\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 \quad \text{pour} \quad 0 < X_3 < h_f \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Les deux couches métalliques peuvent être soudées, brasées ou colaminées.

peut s'établir dans le bicouche lorsqu'il est porté à la température  $T$ . Seules deux composantes non nulles des contraintes sont donc recherchées, avec en outre une dépendance par rapport à la seule variable  $X_3$ .

Les contraintes revêtent la même forme dans le substrat et le film mais sont représentées *a priori* par des fonctions différentes caractérisées par les exposants  $s$  et  $f$ , respectivement. L'isotropie du problème dans le plan  $OX_1OX_2$  incite à penser que ces contraintes sont équi-biaxiales. Les contraintes recherchées sont donc telles que :

$$\sigma_{11}^s(X_3) = \sigma_{22}^s(X_3), \quad \sigma_{11}^f(X_3) = \sigma_{22}^f(X_3) \quad (3)$$

Aucun chargement mécanique extérieur n'est appliqué au composant. Seule la température, supposée homogène dans la plaque à chaque instant, passe de la valeur initiale  $T_0$  à la valeur actuelle  $T$ .

## 1.1 Etat de contraintes équi-biaxiales

Etudier les conditions d'équilibre local du champ de contraintes proposé au sein de la plaque. Justifier en outre que l'on ait considéré que  $\sigma_{33} = 0$ .

Le champ de contraintes proposé est à divergence nulle. En effet, les dérivées partielles  $\sigma_{11,3}$  et  $\sigma_{22,3}$  sont les seules qui soient susceptibles d'être non nulles. Elles n'interviennent pas dans l'expression de la divergence des contraintes. Un tel champ est donc admissible du point de vue des équations d'équilibre. Le choix  $\sigma_{33} = 0$  est compatible avec l'existence des surfaces libres  $X_3 = -h_s, X_3 = h_f$  et avec la troisième équation d'équilibre impliquant la dérivée de  $\sigma_{33}$  par rapport à  $X_3$ . Il faut en outre vérifier la condition d'interface :

$$[[\underline{\sigma}]] \cdot \underline{n} = [[\underline{\sigma}]] \cdot \underline{e}_3 = 0$$

## 1.2 Déformations des couches

Calculer indépendamment dans chaque couche les déformations élastiques puis totales en fonction des contraintes introduites précédemment et de l'écart de température  $T - T_0$ . La notation suivante pour le module d'élasticité biaxiale sera adoptée :

$$M_s := \frac{E_s}{1 - \nu_s}, \quad M_f := \frac{E_f}{1 - \nu_f} \quad (4)$$

La loi d'élasticité isotrope linéarisée fournit, indépendamment dans chaque couche, l'expression des déformations élastiques en fonction des contraintes :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (5)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{22}^e = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_{33}^e = -\frac{2\nu}{E} \sigma_{11} \quad (6)$$

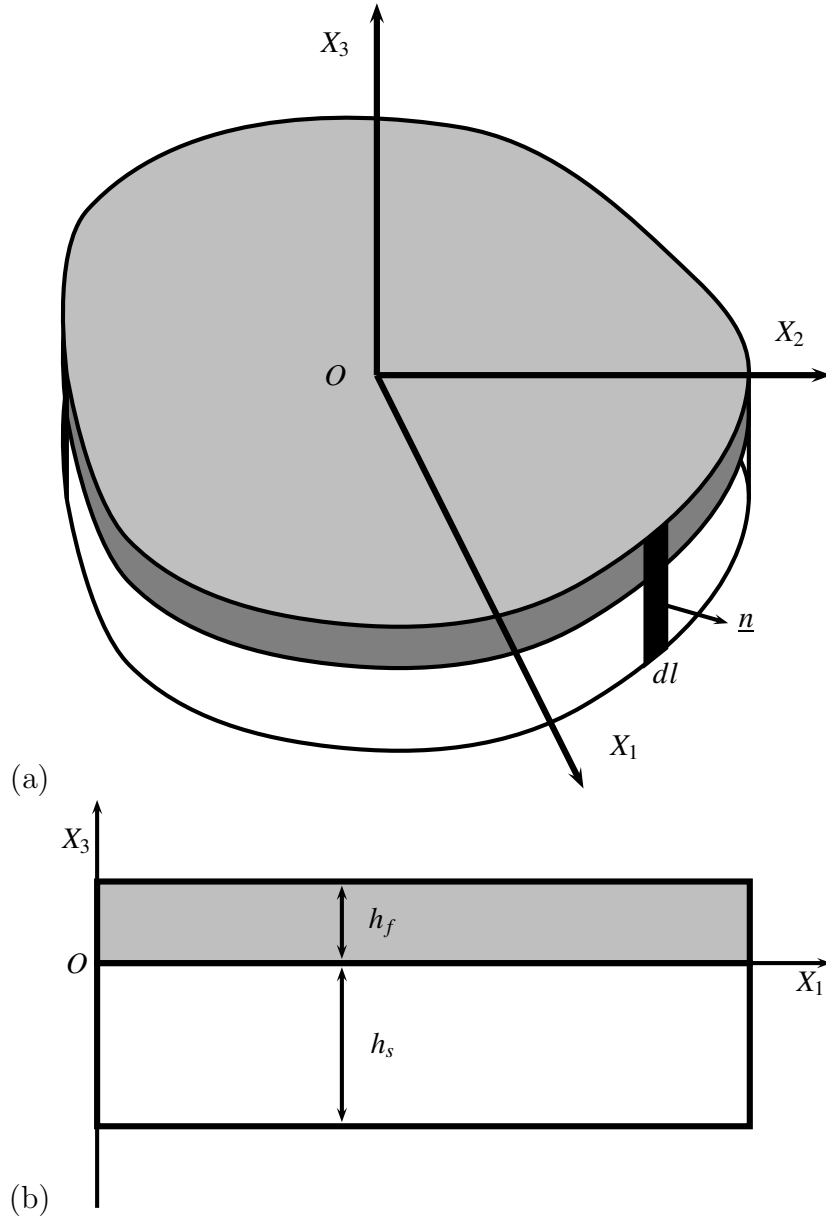


FIG. 1 – Vue en perspective d’une plaque bicouche dans son état initial (a), section initiale ( $X_1 \geq 0, X_2 = 0$ ) (b).

Par souci de concision, on n’a pas mis l’exposant  $s$  ou  $f$  caractéristique de chaque couche mais il y a bien deux jeux d’équations du type précédent. La déformation totale s’obtient en ajoutant la déformation thermique :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{th} \quad \text{avec} \quad \underline{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0)\mathbf{1} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1 - \nu}{E}\sigma_{11} + \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha(T - T_0) \quad (8)$$

Ces relations font intervenir les modules d’élasticité biaxiale  $M_s$  et  $M_f$ .

### 1.3 Equations de compatibilité

En utilisant les conditions de compatibilité pour le champ de déformations établi précédemment, montrer que, dans chaque couche, les contraintes recherchées sont des fonctions affines. Donner ensuite l'expression des déformations totales à l'aide de ces fonctions affines et de la température.

Les équations de compatibilité fournissent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{11,33} = 0, \quad \varepsilon_{22,33} = 0 \quad (9)$$

En substituant les relations (8) dans les équations de compatibilité, on trouve

$$\sigma_{11,33} = 0 \implies \sigma_{11} = aX_3 + b \quad (10)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes par couche, à déterminer. On a tenu compte du fait que la température est supposée homogène. Les déformations aussi sont affines :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1}{M}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) \quad (11)$$

### 1.4 Déplacements

Trouver, indépendamment dans chaque couche, la forme précise du champ de déplacements, à un mouvement de corps rigide infinitésimal près, à savoir les trois composantes :

$$\underline{\mathbf{u}} = u_1(X_1, X_2, X_3)\underline{\mathbf{e}}_1 + u_2(X_1, X_2, X_3)\underline{\mathbf{e}}_2 + u_3(X_1, X_2, X_3)\underline{\mathbf{e}}_3 \quad (12)$$

On ne cherchera pas, pour l'instant, à identifier les constantes apparues lors du processus d'intégration.

La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$  par la formule (??). Cela donne

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= -\varepsilon_{11,3} = -\frac{a}{M}, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= \varepsilon_{22,3} = \frac{a}{M}, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= 0, & \omega_{31,3} &= 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = 0, \quad \omega_{23} = \frac{a}{M}X_2, \quad \omega_{31} = -\frac{a}{M}X_1$$

sans mentionner les termes constants  $p, q, r$  associés à une rotation infinitésimale que l'on ajoutera à la fin. Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \varepsilon_{11} = \frac{1}{M}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) & u_{2,1} &= 0 & u_{3,1} &= -\frac{a}{M}X_1 \\ u_{1,2} &= 0 & u_{2,2} &= \frac{1}{M}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) & u_{3,2} &= -\frac{a}{M}X_2 \\ u_{1,3} &= \frac{a}{M}X_1 & u_{2,3} &= \omega_{23} = \frac{a}{M}X_2 & u_{3,3} &= -\frac{2\nu}{E}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) \end{aligned}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_1 + \alpha(T - T_0)X_1 \quad (13)$$

$$u_2 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_2 + \alpha(T - T_0)X_2 \quad (14)$$

$$u_3 = -\frac{a}{M}\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right) - \frac{2\nu}{E}\left(a\frac{X_3^2}{2} + bX_3\right) + \alpha(T - T_0)X_3 \quad (15)$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide infinitésimal  $\{(p, q, r), \underline{c}\}$ .

On a omis de mettre l'indication  $s$  ou  $f$  sur les coefficients  $E, \nu, M, \alpha$  et les constantes d'intégration  $a, c$ . Les champs de déplacements trouvés ont la même forme dans chaque couche mais des coefficients et constantes *a priori* distinctes.

## 1.5 Contraintes dans chaque couche

Montrer que les contraintes se mettent sous la forme suivante :

$$\sigma_{11}^s = M_s 1 - \nu_s (AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)), \quad \sigma_{11}^f = M_f 1 - \nu_f (AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) \quad (16)$$

où  $A$  et  $C$  sont deux constantes à déterminer plus tard. Il faudra en particulier établir que ces constantes sont les mêmes dans les deux couches.

Calculer alors le saut des contraintes à la traversée de l'interface entre les deux matériaux. Une telle discontinuité est-elle acceptable pour la solution du problème posé ?

Les déplacements ont été établis dans chaque couche. Il faut maintenant se préoccuper de ce qui se passe à l'interface. Celle-ci étant supposée parfaite, les déplacements y sont continus :

$$u_1^s(X_1, X_2, 0) = u_1^f(X_1, X_2, 0), \quad u_2^s(X_1, X_2, 0) = u_2^f(X_1, X_2, 0), \quad u_3^s(X_1, X_2, 0) = u_3^f(X_1, X_2, 0) \quad (17)$$

Examinons d'abord la condition sur  $u_3$ . Pour  $X_3 = 0$ , la composante  $u_3$  comporte le terme quadratique :

$$-\frac{a^{s,f}}{M_{s,f}}\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right)$$

Pour que les fonctions  $u_3^s$  et  $u_3^f$  coïncident à l'interface, pour toute valeur de  $X_1$ , il faut que les coefficients de ces monomes soient identiques :

$$\frac{a^s}{M_s} = \frac{a^f}{M_f} = A \quad (18)$$

où l'on introduit le coefficient unique  $A$ . A l'interface  $X_3 = 0$ , les composantes  $u_1$  et  $u_2$  prennent la forme :

$$u_1^{s,f} = \frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_1 + \alpha_{s,f}(T - T_0)X_1, \quad u_2^{s,f} = \frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_2 + \alpha_{s,f}(T - T_0)X_2$$

à un mouvement de corps rigide près. Ces déplacements ne peuvent coïncider que si

$$\frac{b^s}{M_s} + \alpha_s(T - T_0) = \frac{b^f}{M_f} + \alpha_f(T - T_0) = C \quad (19)$$

où l'on introduit la constante unique  $C$ . Muni de ces constantes identiques dans les deux couches, on est en mesure d'évaluer à nouveau les contraintes. On a vu que, dans chaque couche :

$$\sigma_{11}^s = a^s X_3 + b^s = M^s (AX_3 + C - \alpha^s (T - T_0)), \quad \sigma_{11}^f = a^f X_3 + b^f = M^f (AX_3 + C - \alpha^f (T - T_0)) \quad (20)$$

C'est la forme annoncée dans l'énoncé.

La discontinuité des contraintes à l'interface s'écrit :

$$[[\sigma_{11}]] = [[\sigma_{22}]] = (M_s - M_f)C - (M_s \alpha_s - M_f \alpha_f)(T - T_0) \quad (21)$$

Une discontinuité de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  est tout à fait licite puisque seules les composantes du vecteur-contrainte doivent être continues à la traversée de toute surface de normale  $\underline{e}_3$ , à savoir les composantes  $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$  qui sont nulles dans les deux couches.

## 1.6

Achever la détermination des déplacements en fonction de  $A$  et  $C$ . On utilisera les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) &= u_2(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = u_3(0, 0, 0) = 0 \\ u_1(0, 0, X_3 = h_f) &= u_2(0, 0, X_3 = h_f) = 0 \\ u_2(X_1 = L, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

où le point de coordonnées  $(L, 0, 0)$  est un point donné supposé appartenir à la plaque.

Les déplacements (15) vérifient les conditions aux limites proposées. Il reste donc à fixer le mouvement de corps rigide adapté à ces conditions de Dirichlet. Un tel mouvement infinitésimal est de la forme :

$$\begin{aligned} u_1 &= -rX_2 + qX_3 + c_1 \\ u_2 &= rX_1 - pX_3 + c_2 \\ u_3 &= -qX_1 + pX_2 + c_3 \end{aligned}$$

La première condition exige que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

La deuxième condition exige alors que  $p = q = 0$ .

La troisième condition exige que  $r = 0$ .

Les conditions aux limites proposées sont donc nécessaires et suffisantes pour fixer le mouvement de corps rigide du solide, laissé indéterminé lors de l'intégration.

On exprime maintenant les déplacements en fonction de  $A$  et  $C$  :

$$u_1 = AX_1X_3 + CX_1 \quad (22)$$

$$u_2 = AX_2X_3 + CX_2 \quad (23)$$

$$u_3 = -A\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right) - \frac{2\nu}{1-\nu}\left(A\frac{X_3^2}{2} + CX_3\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)X_3 \quad (24)$$

## 1.7 Torseur des efforts résultant

Calculer le torseur des efforts résultant sur un élément de la surface latérale  $\partial S \times ]-h_s, h_f[$ , engendré par le segment du bord  $X_1 = \text{Constante1}, X_2 = \text{Constante2}$ , d'épaisseur  $h$  et de largeur infinitésimale  $dl$  comme sur la figure 1(a). Le vecteur normal en chaque point du bord a pour composantes  $(n_1, n_2, 0)$ . Comme on ne préjuge pas de la forme du bord de la plaque, ces composantes  $n_1, n_2$  peuvent être quelconques. On exprimera le torseur résultant en fonction de  $A, C, T - T_0$  et des caractéristiques du bicouche. Etablir alors le système linéaire permettant de déterminer finalement  $A$  et  $C$ . La détermination explicite de  $A$  et  $C$  est repoussée à la partie suivante du problème. Indiquer enfin dans quelles circonstances la démarche adoptée jusqu'ici conduit effectivement à une solution satisfaisante du problème posé.

On calcule la résultante (linéique) des efforts sur une surface d'équation  $X_1 = \text{Cste}, X_2 = \text{Cste}$  et d'épaisseur infinitésimale. La troisième composante de cette résultante est nulle. Les deux premières composantes d'intérêt sont :

$$R_1 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} n_1 dX_3 = \left( \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \right) n_1 \quad (25)$$

$$R_2 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} n_2 dX_3 = \left( \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} dX_3 \right) n_2 \quad (26)$$

puisque le vecteur normal est constant le long de l'élément de surface cylindrique considéré. Le moment (linéique) résultant, quant à lui, s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{M}} = \int_{-h_s}^{h_f} \begin{bmatrix} -\sigma_{22} X_3 n_2 \\ \sigma_{11} X_3 n_1 \\ \sigma_{11} (X_1 n_2 - X_2 n_1) \end{bmatrix} dX_3 \quad (27)$$

Par conséquent,

$$M_1 = \left( \int_{-h_s}^{h_f} -\sigma_{11} X_3 dX_3 \right) n_2, \quad M_2 = \left( \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 \right) n_1 \quad (28)$$

$$M_3 = n_2 X_1 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 - n_1 X_2 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \quad (29)$$

On est donc amené à calculer deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 &= \int_{-h_s}^0 M_s (AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)) dX_3 + \int_0^{h_f} M_f (AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) dX_3 \\ &= -M_s A \frac{h_s^2}{2} + M_s (C - \alpha_s(T - T_0)) h_s + M_f A \frac{h_f^2}{2} + M_f (C - \alpha_f(T - T_0)) h_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 &= \int_{-h_s}^0 M_s (AX_3^2 + CX_3 - \alpha_s(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &+ \int_0^{h_f} M_f (AX_3^2 + CX_3 - \alpha_f(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &= M_s A \frac{h_s^3}{3} - M_s (C - \alpha_s(T - T_0)) \frac{h_s^2}{2} + M_f A \frac{h_f^3}{3} + M_f (C - \alpha_f(T - T_0)) \frac{h_f^2}{2} \end{aligned}$$

Comme aucun effort extérieur n'est appliqué au composant, ces deux résultantes s'annulent. Comme l'une au moins des composantes  $n_1$  ou  $n_2$  est non nulle, le torseur résultant est nul si et seulement si les deux intégrales sont nulles :

$$\int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 = 0, \quad \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 = 0$$

On en déduit un système de deux équations d'inconnues  $A$  et  $C$  :

$$(M_f h_f^2 - M_s h_s^2) \frac{A}{2} + (M_s h_s + M_f h_f) C = (M_s h_s \alpha_s + M_f h_f \alpha_f) (T - T_0) \quad (30)$$

$$(M_s h_s^3 + M_f h_f^3) \frac{A}{3} + (M_f h_f^2 - M_s h_s^2) \frac{C}{2} = (M_f h_f^2 \alpha_f - M_s h_s^2 \alpha_s) \frac{T - T_0}{2} \quad (31)$$

On vérifiera que les épaisseurs  $h_s$  et  $h_f$  jouent un rôle symétrique dans ce système, comme il se doit puisque l'origine du repère est sur l'interface. Pour le voir, changer  $h_s$  en  $-h_s$ , c'est-à-dire prendre  $h_s$  algébrique, les épaisseurs sont alors interchangeables.

La démarche proposée a permis de déterminer un champ de contraintes et un champ de déplacements satisfaisant les équations de champs et remplissant les conditions aux limites au moins au sens de Saint-Venant. En effet, la solution en contrainte ne permet pas de garantir que le vecteur-contrainte soit nul point par point sur le bord de la plaque mais assure la nullité du torseur résultant sur chaque élément du bord. Le principe de Saint-Venant indique alors que la solution trouvée est satisfaisante assez loin du bord, ce qui est assuré dans presque toute la pièce dans le cas d'un disque aplati tel que

$$\frac{h}{L} \ll 1$$

où  $L$  est la plus petite des deux dimensions caractéristiques de la base de la plaque.

## 1.8 Comparaison avec un modèle numérique

Le problème peut aussi être résolu de manière numérique pour des valeurs particulières des caractéristiques du composant, par exemple grâce à la méthode des éléments finis. La déformée et le champ de contraintes obtenus numériquement pour une plaque à bord circulaire sont donnés sur la figure 2 dans le cas d'un disque bilame constitué d'une couche d'invar (alliage de fer et de nickel) et d'une couche de laiton d'épaisseur identique. Le bilame a été chauffé de  $100^\circ\text{C}$  par rapport à la température ambiante, température à laquelle le bilame est un disque parfait sans contraintes internes.

Commenter la qualité de la solution trouvée précédemment.

Le champ de contraintes observé semble effectivement indépendant de  $X_1$ , sauf près du bord libre  $X_1 = L$ . Les profils semblent linéaires dans chaque couche.

La méthode proposée ne permet pas de préciser l'effet de bord visible sur la simulation numérique. On voit que, près du bord, l'invariance des contraintes vis-à-vis de  $r$  n'est plus de mise. On montre en fait que les contraintes  $\sigma_{33}$  et  $\sigma_{13}$  se développent et présentent une singularité au point où l'interface rencontre le bord (Freund and Suresh, 2003).



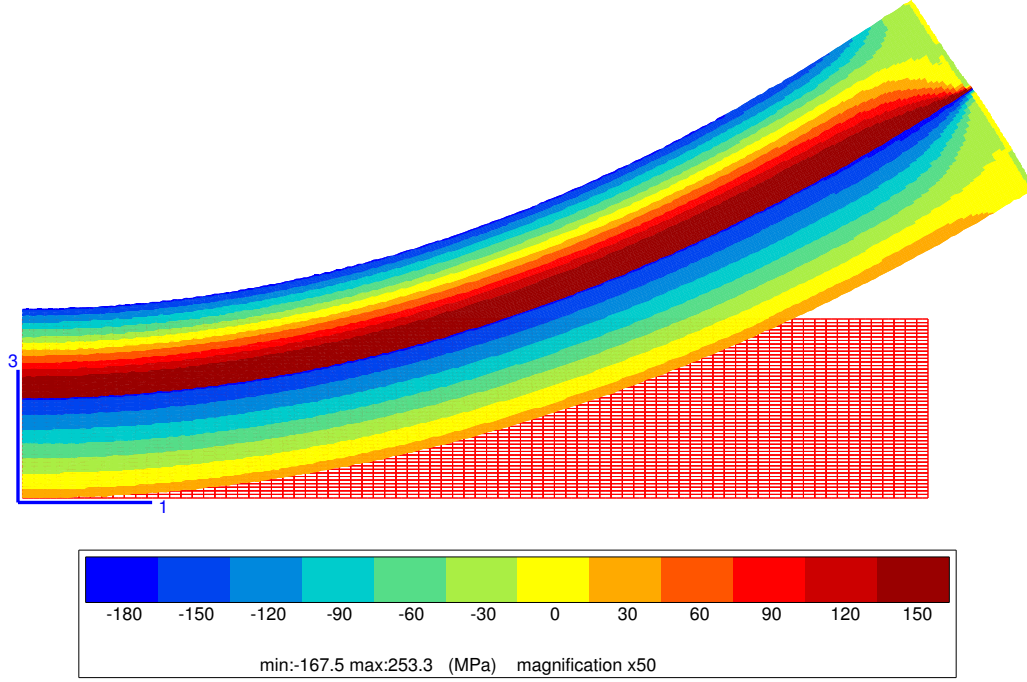


FIG. 2 – Etats initial et déformé (fortement amplifié) d’une section  $X_1 \geq 0, X_3$  d’un bilame constitué d’une couche d’invar (haut) et d’une couche de laiton (bas) de même épaisseur. Le champ de contrainte  $\sigma_{11}$  dans le bilame est donné sous forme d’isovaleurs dont le code de couleur est fourni.

## 2 Solution générale et application à un bilame laiton/invar

### 2.1 Résolution du système

La solution établie dans la partie précédente ne dépend plus que de deux paramètres, solutions du système linéaire mis en évidence au paragraphe 1.7. La solution de ce système est donnée ici explicitement :

$$A = 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_f - \alpha_s) (T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \Delta^{-1} \quad (32)$$

$$\Delta = 1 + 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + 6 \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4 \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \quad (33)$$

$$C = \left( \alpha_s + 4\alpha_f \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + 3(\alpha_s + \alpha_f) \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4\alpha_s \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \alpha_f \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \right) (T - T_0) \Delta^{-1} \quad (34)$$

On ne demande pas d’établir ces résultats.

Plusieurs applications sont envisagées dans la suite concernant les bilames et les couches minces sur un substrat, configuration fréquente en microélectronique.

## 2.2 Bilame de laiton et d'invar

On considère, comme au paragraphe 1.8, un bicouche constitué d'une couche inférieure en laiton et d'une couche supérieure en invar. L'invar est un alliage de fer et de nickel aux propriétés remarquables élaboré par le métallurgiste Guillaume en 1897 (35–38% de nickel en poids, cf. (Béranger et al., 1996)). Il possède le coefficient de dilatation le plus faible parmi les métaux et alliages industriels, près de 20 fois plus faible que le fer et 10 fois plus faible que le nickel purs, à température ambiante. En outre, son coefficient de dilatation varie peu sur une large gamme de température (jusqu'à 100 à 200°C selon les compositions). Pour ces raisons, l'invar est utilisé comme matériau de structure des méthaniers géants qui sillonnent les mers avec leur cargaison de gaz cryogénique. Il est aussi utilisé dans les bilames métalliques souvent en association avec le laiton. Pour construire un bilame, on associe un métal à faible coefficient de dilatation avec un métal à fort coefficient de dilatation.

On considère ici un tel bilame de laiton et d'invar dont les caractéristiques thermoélastiques sont données dans le tableau 1 et supposées ne pas varier avec la température dans le domaine de température considéré. La géométrie étudiée est telle que  $h_s = h_f = h/2$ . Comme les résultats en contraintes et déformations ne dépendent pas explicitement des valeurs de  $h_f$  et  $h_s$  mais seulement du rapport de ces longueurs, on ne donne pas ici l'épaisseur réelle du composant. Le bilame, initialement dans son état naturel, est soumis à un écart de température  $T - T_0 = 100^\circ\text{C}$ .

Vérifier que les conditions permettant de respecter le contexte infinitésimal sont remplies.

Tracer les profils de déplacements  $u_1/h$  et  $u_3/h$  de la ligne  $X = 2 = X_3 = 0$  en fonction de la distance à l'origine  $X_1/h$ .

Tracer de même les profils de déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{33}$ , d'une part, et de contrainte  $\sigma_{11}$ , d'autre part, le long de l'axe  $X_1 = X_2 = 0$ , en fonction de la cote relative  $X_3/h$ .

Pour expliciter les fonctions en jeu, on tirera profit du fait que dans le cas du laiton et de l'invar :

$$\frac{M_f}{M_s} = 2$$

Indiquer enfin l'endroit du bilame où la contrainte est la plus forte. Calculer la valeur numérique de cette contrainte maximale.

Donner l'expression de l'écart de température pour lequel la plasticité peut apparaître dans le laiton supposé obéir à un critère de plasticité de Tresca avec une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction. On suppose que l'invar garde un comportement purement élastique.

Dans le cas particulier du couple laiton/invar, on a

$$\Delta = 33, \quad A = \frac{8}{11}(\alpha_f - \alpha_s)\frac{T - T_0}{h_s}, \quad C = \frac{T - T_0}{11}(5\alpha_s + 6\alpha_f)$$

Remarquer que, dans le cas présent,  $T - T_0 > 0 \implies C > 0, A < 0$ .

Pour tester la validité du contexte infinitésimal, on calcule le gradient du champ de déplacement déterminé au paragraphe 1.4 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = AX_3 + C, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X_3} = AX_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial X_1} = -AX_1$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_3} = -\frac{2\nu}{1-\nu}(AX_3 + C) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)$$

Des conditions suffisantes pour le respect du contexte infinitésimal sont :

$$|\alpha_{s,f}(T - T_0)| \ll 1 \implies |AX_3| \leq |Ah| \ll 1, |C| \ll 1$$

$$|(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)| \frac{L}{h_s} \ll 1 \implies |AX_1| \leq |AL| \ll 1$$

La première condition est remplie dans le cas du bilame laiton/invar étudié. La deuxième condition donne une limite supérieure à la plus grande dimension caractéristique du bicouche en fonction de son épaisseur.

A l'interface, i.e. en  $X_3 = 0$ , les déplacements valent :

$$u_1 = CX_1, \quad u_3 = -\frac{A}{2}X_1^2$$

Le déplacement radial est linéaire avec une pente positive tandis que le déplacement axial imprime au plan  $X_3 = 0$  une courbure positive  $-A$ . Suffisamment loin du bord du disque et *a fortiori* sur l'axe  $X_1 = X_2 = 0$ , les déformations sont les suivantes :

$$\varepsilon_{11} = AX_3 + C, \quad \varepsilon_{33}^{f,s} = -\frac{2\nu_{f,s}}{1 - \nu_{f,s}}(AX_3 + C) + \frac{1 + \nu_{f,s}}{1 - \nu_{f,s}}\alpha_{f,s}(T - T_0)$$

Quant aux contraintes, on trouve :

$$\frac{\sigma_{11}^f}{2M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11} \left(8 \frac{X_3}{h_s} - 5\right), \quad \frac{\sigma_{11}^s}{M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11} \left(8 \frac{X_3}{h_s} + 6\right)$$

Les profils de déplacements, déformations et contraintes dans le bilame laiton/invar considéré sont données sur la figure 3. Remarquer que la base du composant s'allonge radialement et se courbe avec la concavité tournée vers le haut. La déformation  $\varepsilon_{11}$  est linéaire sur toute l'épaisseur du composant et continue à l'interface. Au contraire, la composante  $\varepsilon_{33}$  et les contraintes présentent une discontinuité au passage de l'interface.

Le profil de contraintes étant affine par morceaux, il suffit, pour trouver la contrainte maximale, de calculer la valeur de la contrainte successivement en  $X_3/h_s = -1$ ;  $X_3/h_s = 0^-$ ;  $X_3/h_s = 0^+$ ;  $X_3/h_s = 1$ , ce qui donne :

$$\frac{\sigma_{11}}{M_s(T - T_0)(\alpha_s - \alpha_f)} = \frac{2}{11}; \quad -\frac{6}{11}; \quad \frac{10}{11}; \quad -\frac{6}{11}$$

La contrainte est donc maximale à l'interface du côté de l'invar. Noter la valeur obtenue de 253 MPa calculée à cet endroit, qui risque fort d'outrepasser la limite d'élasticité de l'invar. Il est donc probable que, porté à cette température, le bilame sera le siège de déformations plastiques et qu'une courbure résiduelle plastique persistera après le retour à la température ambiante.

### 3 La formule de Stoney

On revient d'abord au cas général d'un bicouche constitué de deux matériaux quelconques. Avant d'aborder deux applications

matériau	$E$ (GPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $\times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ )
aluminium	70	0.33	23
invar	210	0.33	1.2
laiton	103	0.34	19
silicium	150	0.17	3

TAB. 1 – Propriétés thermoélastiques à 20°C de quelques matériaux.

### 3.1 Cas d'un film mince

Donner l'expression simplifiée de la courbure  $c$  que prend le composant quand il est chauffé, dans le cas d'un film mince sur un substrat, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{h_f}{h_s} \ll 1 \quad (35)$$

Pour cela, on développera les expressions (32) à (34) au premier ordre.

Indiquer quelle condition supplémentaire sur les caractéristiques du bicouche conduit à l'expression suivante donnant la courbure  $c$  qu'adopte le bicouche lorsqu'il est chauffé :

$$c = \frac{6M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \quad (36)$$

C'est la formule dite de Stoney (Stoney, 1909) constamment utilisée dans la recherche/développement en microsystèmes et microélectronique (MEMS<sup>2</sup>) pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 3.4.

L'expression (24) du déplacement  $u_3$  montre une dépendance en  $X_1^2$  responsable de la courbure que prennent les surfaces d'équation  $X_3 = Cste$ . La courbure, par rapport à chacun des axes  $X_1$  et  $X_2$ , est donnée par le double du coefficient de cette dépendance quadratique :

$$c = -A \quad (37)$$

Chaque surface déformée présente une double courbure et prend donc la forme de calotte sphérique de rayon  $-1/A$ , dans le contexte infinitésimal.

Le développement au premier ordre en  $h_f/h_s$  de l'expression (32) conduit à l'état de courbure suivant :

$$c \simeq 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \left(1 + 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s}\right)^{-1} \quad (38)$$

La formule de Stoney est alors obtenue lorsque

$$M_f h_f \ll M_s h_s \quad (39)$$

Cette condition combine les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques des couches.

<sup>2</sup> Micro-Electro-Mechanical Systems

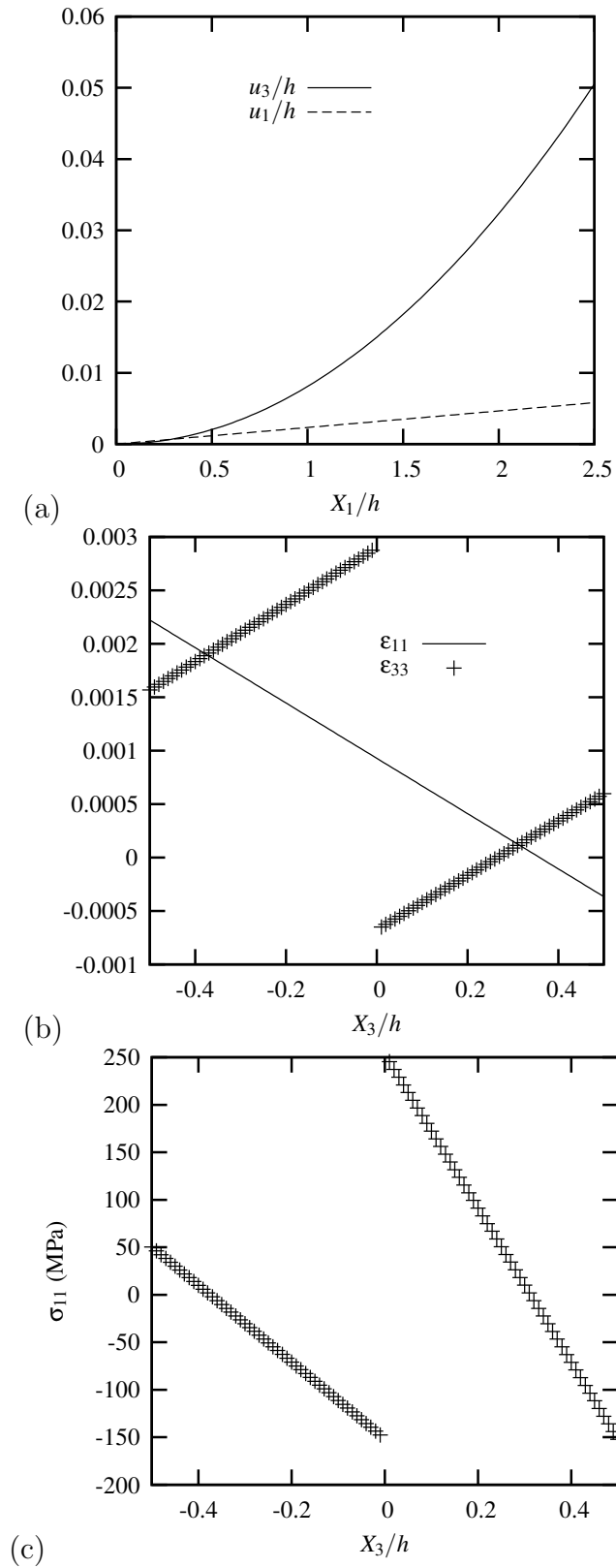


FIG. 3 – Bilame moitié laiton, moitié invar chauffé de  $100^\circ\text{C}$  : (a) déplacements de l'interface du bicouche  $X_3 = 0$ , (b) déformations et (c) contraintes le long de l'axe  $X_1 = X_2 = 0$ .

### 3.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat

En se plaçant dans les hypothèses de Stoney, i.e. lorsque la condition (35) et la condition supplémentaire requise au paragraphe précédent sont satisfaites, établir la forme simplifiée des contraintes dans le substrat et le film.

Calculer alors les contraintes moyennes dans le film et dans le substrat :

$$\bar{\sigma}_{11}^s = \frac{1}{h_s} \int_{-h_s}^0 \sigma_{11}^s dX_3, \quad \bar{\sigma}_{11}^f = \frac{1}{h_f} \int_0^{h_f} \sigma_{11}^f dX_3 \quad (40)$$

Vérifier que l'équilibre requis de ces contraintes moyennes est satisfait par les expressions trouvées.

Montrer que, dans tout bicouche constitué d'un substrat et d'un film mince, le plan neutre, associé à une contrainte nulle, se situe toujours dans le substrat, à une distance à l'interface égale aux deux tiers de l'épaisseur du substrat, c'est-à-dire en

$$X_3 = -\frac{2h_s}{3} \quad (41)$$

Les conditions (35) et (39) étant requises, on peut adopter l'expression (36) pour  $A$  et la suivante pour  $C$  en développant (34) au premier ordre :

$$C \simeq (\alpha_s + 4\alpha_f \frac{M_f h_f}{M_s h_s})(1 - 4\frac{M_f h_f}{M_s h_s})(T - T_0) \simeq (\alpha_s + 4(\alpha_f - \alpha_s) \frac{M_f h_f}{M_s h_s})(T - T_0) \quad (42)$$

Les contraintes sont données par les relations (16) dans chaque couche. Avec les développements limités précédents, les contraintes dans le film valent :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^f}{M_f} &= AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0) \simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)(1 - 4\frac{M_f h_f}{M_s h_s} - 6\frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} X_3) \\ &\simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \end{aligned} \quad (43)$$

Le premier terme, constant, domine dans le film :

$$\bar{\sigma}_{11}^f = \bar{\sigma}_{22}^f \simeq M_f(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \quad (44)$$

C'est une relation remarquable puisqu'elle ne dépend que des propriétés thermoélastiques du film et du désaccord de dilatation entre le film et le substrat.

Dans le substrat, la contrainte est d'un ordre de grandeur inférieure :

$$\frac{\sigma_{11}^s}{M_s} = AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0) \simeq (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (6\frac{X_3}{h_s} + 4) \quad (45)$$

$$\bar{\sigma}_{11}^s \simeq \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \quad (46)$$

La contrainte moyenne sur tout le volume du bicouche est nulle, comme il se doit, en l'absence de chargement extérieur<sup>3</sup> :

$$h_s \bar{\sigma}_{11}^s + h_f \bar{\sigma}_{11}^f = 0 \quad (47)$$

<sup>3</sup> C'est pourquoi on parle de contraintes résiduelles ou internes.

Au vu des contraintes quasi-constantes régnant dans le film mince, la fibre neutre est à rechercher dans le substrat :

$$\sigma_{11}^s = 0 \implies X_3 \simeq -\frac{2h_s}{3} \quad (48)$$

d'après la relation (45). La fibre neutre est donc située aux deux tiers en dessous de l'interface, indépendamment des propriétés thermoélastiques du bilame, respectant toutefois les hypothèses de Stoney.

### 3.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium

Un wafer de silicium est constitué d'un substrat monocristallin de silicium sur lequel les différentes couches métalliques ou autres sont déposées pour fabriquer des composants électroniques. On étudie ici les contraintes qui se développent dans un film d'aluminium d'1  $\mu\text{m}$  d'épaisseur déposé sur un substrat de silicium de 500  $\mu\text{m}$  d'épaisseur. Le dépôt s'effectue à une température de 50°C. A la fin du dépôt, le substrat et le film sont supposés être dans leur état naturel. A cette température de 50°C, le composant est un disque parfait de rayon égal à 200 mm. Il est ensuite refroidi jusqu'à la température ambiante de 20°C.

Calculer successivement la courbure résiduelle du composant, et les contraintes moyennes dans le film et le substrat. Commenter.

La contrainte trouvée dans le film est relativement proche de la limite d'élasticité de l'aluminium massif. On fait remarquer toutefois que les métaux sous forme de films minces, voire nanométriques, ont en général une limite d'élasticité significativement plus importante qu'à l'état massif.

On traitera le silicium comme un matériau isotrope avec les propriétés indiquées dans le tableau 1, propriétés supposées constantes dans le domaine de température concerné. On y trouvera aussi les autres caractéristiques des matériaux nécessaires au calcul, supposées indépendantes de la température.

Les hypothèses de Stoney sont remplies dans le cas du composant considéré :

$$\frac{h_f}{h_s} = 2.10^{-3}, \quad \frac{M_f h_f}{M_s h_s} = 1.1 10^{-3} \quad (49)$$

de sorte que les formules établies dans ces conditions peuvent être utilisées. La courbure est donnée par la relation (36) :

$$c = 8.3 10^{-3} \text{m}^{-1}, \quad \frac{1}{c} = 120 \text{m} \quad (50)$$

La courbure est positive, ce qui correspond à une interface de concavité tournée vers le haut. Le rayon de courbure de 120 m est infiniment plus grand que la taille du composant. Cette courbure est toutefois tout à fait mesurable, par exemple grâce à des méthodes optiques dont la résolution est typiquement de 15  $\mu\text{m}$  (Freund and Suresh, 2003). La mesure de la courbure du composant permet d'accéder, grâce aux calculs précédents, à une estimation de la contrainte dans le film. La formule (44) donne :

$$\sigma_{11}^f = \sigma_{22}^f = 63 \text{MPa} \quad (51)$$

Il s'agit d'une contrainte de traction. En effet, le coefficient de dilatation de l'aluminium est plus élevé que celui du silicium et l'écart entre la température d'élaboration et la température ambiante est de  $-30^\circ\text{C}$ . La contrainte moyenne dans le substrat n'est que de  $-0.13\text{ MPa}$  en raison de sa grande épaisseur. La limite d'élasticité de l'aluminium massif et de ses alliages varie de  $50$  à  $150\text{ MPa}$ . Toutefois, elle est beaucoup plus élevée dans les films minces en raison de leur microstructure spécifique.

### 3.4 Contraintes d'épitaxie

Les déformations d'origine thermique ne sont pas les seules causes du développement de contraintes au sein d'un revêtement sur un substrat. En microélectronique, les couches déposées sont souvent en épitaxie avec le substrat, c'est-à-dire que les rangées d'atomes du substrat se prolongent exactement en les rangées atomiques de la couche. C'est le cas par exemple des dépôts de silicium-germanium sur un substrat de silicium monocristallin. Toutefois, le paramètre cristallin<sup>4</sup>  $a_{SiGe} = 0.5476\text{ nm}$  du silicium-germanium (pour  $80\%$  de silicium et  $20\%$  de germanium dans le composé binaire) est légèrement plus grand que le paramètre du silicium  $a_{Si} = 0.5431\text{ nm}$  en raison de l'implantation des atomes de germanium. Pour que les rangées atomiques se prolongent du substrat au film, il faut donc que les plans atomiques du film se rapprochent légèrement. Les contraintes naissent justement de l'écart entre la valeur du paramètre cristallin *in situ* et la valeur d'équilibre sans contrainte (à savoir  $a_{Si}$  pour le silicium et  $a_{SiGe}$  pour le silicium-germanium). Si le film n'était pas contraint de croître en épitaxie avec le substrat, il se déformerait librement de la quantité :

$$\varepsilon_{11}^{*f} = \varepsilon_{22}^{*f} = \varepsilon_{33}^{*f} = \frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \quad (52)$$

par rapport au substrat de silicium. La déformation totale dans le film est donc la somme d'une déformation élastique et de la déformation libre d'épitaxie :

$$\varepsilon_{11}^f = \varepsilon_{11}^{ef} + \varepsilon_{11}^{*f} \quad (53)$$

Le substrat de silicium, quant à lui, est tel que

$$\varepsilon_{11}^{*s} = 0 \quad (54)$$

En utilisant une analogie avec le problème précédent des contraintes d'origine thermique dans un film mince sur un substrat, calculer les contraintes dans le film et la courbure du composant. Pour le silicium-germanium considéré, on prendra  $M_f = 170\text{ GPa}$ . Les caractéristiques géométriques du dépôt sont :  $h_f = 100\text{ nm}$ ,  $h_s = 1\text{ mm}$ .

La déformation libre d'épitaxie s'apparente à la dilatation thermique et l'on a l'analogie suivante :

$$\frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \equiv \alpha_f(T - T_0), \quad \text{et} \quad 0 \equiv \alpha_s(T - T_0)$$

Ce désaccord paramétrique vaut  $0.83\%$ . L'épitaxie entre le film et le substrat oblige le film à accommoder élastiquement la déformation imposée par le substrat. Le contexte est tout à fait

<sup>4</sup> Le paramètre cristallin est la plus petite distance inter-réticulaire, c'est-à-dire entre plans atomiques.



semblable au cas du film mince siège de déformations thermiques sur un substrat. Les formules (36) et (44) s'appliquent de la façon suivante :

$$\bar{\sigma}_{11}^f = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f \simeq M_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -1403 \text{MPa}$$

$$c = \frac{6M_f}{M_s h_s^2} h_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -5.6310^{-3} \text{m}^{-1}$$

ce qui donne un rayon de courbure de -177 m. Noter les contraintes considérables de compression qui règnent dans le film après élaboration, dues à des déformations élastiques proches du %. Il y a en fait si peu de défauts cristallins dans ces couches nanométriques que de telles contraintes peuvent exister sans provoquer de déformation plastique.

## Références

- Béranger G., Duffaut F., Morlet J., and Thiers J.F. (1996). *The iron–nickel alloys : A hundred years after the discovery of invar*. SOS Free Stock.
- Freund L.B. and Suresh S. (2003). *Thin Film Materials*. Cambridge University Press.
- Stoney G.G. (1909). *The tension of metallic films deposited by electrolysis*. Proceedings of the Royal Society London, vol. A82, pp 172–175.

\* \* \*