

# Contraintes dans les corps célestes

L'objectif du problème est de déterminer les contraintes engendrées en chaque point matériel d'un corps par les interactions gravitationnelles avec les autres points de ce corps. Ce type d'efforts a été écarté dans les exercices traités dans le cours mais ils deviennent prépondérants dans les planètes, leurs satellites et les étoiles. Dans ce problème sont envisagés successivement les cas d'une planète fluide, d'une planète solide et d'une planète solide à noyau fluide<sup>1</sup>.

Dans tout le problème, la pression atmosphérique des corps étudiés et les interactions avec d'autres corps extérieurs sont négligées. Dans un souci de simplicité, les conséquences des variations de température au sein des corps ne sont pas prises en compte dans l'analyse.

Le problème commence par des préliminaires dont les résultats peuvent être admis dans la suite même si leur établissement ne demande pas de calculs mais seulement quelques remarques judicieuses.

## 1 Préliminaires

Un corps céleste dans sa configuration actuelle  $\Omega_t$  est le siège d'efforts dus à l'interaction gravitationnelle à distance entre les points matériels qui le constituent. La densité volumique de tels efforts s'exerçant sur le point matériel  $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega_t$  de masse volumique  $\rho(\underline{\mathbf{x}})$  est de la forme :

$$\underline{\rho\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}) = \rho(\underline{\mathbf{x}}) \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}') \mathcal{G} \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'}{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'\|^3} dv' \quad (1)$$

Il faut remarquer que l'effort exercé en  $\underline{\mathbf{x}}$  résulte de l'interaction avec tous les autres points  $\underline{\mathbf{x}}'$  du corps, situation inédite dans ce cours. Il fait intervenir la constante de gravitation de Newton, notée  $\mathcal{G}$  et dont la valeur est :  $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

### 1.1 Loi de Cauchy en présence d'efforts de gravitation

Écrire les lois d'Euler pour un sous-domaine  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  en présence du champ de gravitation  $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})$  donné par (1).

Justifier ensuite brièvement le fait que la construction du tenseur des contraintes par la méthode du tétraèdre de Cauchy ne soit pas modifiée par la présence du champ de gravitation.

Déduire enfin des deux remarques précédentes que la loi locale de conservation de la quantité de mouvement en tout point régulier du corps  $\Omega_t$  s'écrit :

$$\text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (2)$$

où  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  est un champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques. En général, la détermination de la forme  $\Omega_t$  du corps est d'autant plus délicate que les efforts de gravitation en dépendent explicitement.

---

<sup>1</sup> Certains aspects du problème proposé sont inspirés d'un texte inédit dû au Professeur Jean-Baptiste Leblond de l'Université Pierre et Marie Curie.

La première loi d'Euler représente le bilan de quantité de mouvement pour le domaine  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  et fait intervenir les densités volumique et surfacique d'efforts appliqués :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{v}} dv = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}, \Omega_t) dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}) ds$$

Le fait que le champ de gravitation  $\underline{\mathbf{g}}$  donné par (1) dépende de la forme et de la répartition de masse au sein de  $\Omega_t$  ne modifie en rien la représentation ni le traitement du bilan de quantité de mouvement. Il en va de même du bilan du moment cinétique.

La construction du tenseur des contraintes de Cauchy est basée sur l'exploitation du bilan de quantité de mouvement sur un tétraèdre  $\Delta_h$

$$\int_{\Delta_h} \rho(\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})) dv = \int_{\partial \Delta_h} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}) ds$$

La linéarité de  $\underline{\mathbf{t}}$  s'établit comme dans le cours. Le point central dans l'argumentation est lié au fait que  $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})$  dépend certes de  $\Omega_t$  mais garde la même valeur lorsque l'on change  $\mathcal{D}_t$  ou  $\Delta_h$ . En d'autres termes, le calcul de  $\underline{\mathbf{g}}$  est indépendant du sous-domaine considéré. La première loi de Cauchy sous la forme (2) s'en déduit.

## 1.2 Cas d'un corps de forme sphérique

Lorsque  $\Omega_t$  est une boule de centre O et de rayon  $R$ , et que la répartition de masse est également à symétrie sphérique, montrer que le champ de gravitation induit par le corps  $\Omega_t$  lui-même, à l'exclusion de tout corps extérieur, se met sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}) = -\frac{\mathcal{G}M(r)}{r^2} \underline{\mathbf{e}}_r \quad (3)$$

où  $M(r) = \int_{\mathcal{B}_r} \rho dv$  est la masse contenue dans la boule  $\mathcal{B}_r$  de centre O et de rayon  $r$ . On utilise le système de coordonnées sphériques d'origine O.

L'équation de champ régissant la gravitation newtonienne est

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{g}} = -4\pi \mathcal{G} \rho \quad (4)$$

Calculons le flux de  $\underline{\mathbf{g}}$  à travers la sphère  $\partial \mathcal{B}_r$  :

$$\int_{\partial \mathcal{B}_r} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_r ds = \int_{\mathcal{B}_r} \operatorname{div} \underline{\mathbf{g}} dv = -4\pi \mathcal{G} \int_{\mathcal{B}_r} \rho dv$$

en utilisant le théorème de la divergence. Ce résultat est en général enseigné directement au travers de la formule dite de Gauss.

Lorsque le corps étudié et sa répartition de masse sont à symétrie sphérique, le champ de gravitation est à symétrie sphérique de la forme  $\underline{\mathbf{g}} = g(r)\underline{\mathbf{e}}_r$ . Le résultat annoncé s'en déduit :

$$\int_{\partial \mathcal{B}_r} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_r ds = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} M(r)$$

## 2 Planète fluide

Lorsque le milieu constituant la planète est un fluide élastique, qu'il s'agisse d'une phase gazeuse ou liquide, les équations de l'hydrostatique suffisent à déterminer le champ de pression  $p(\underline{x})$  au sein de la planète.

Montrer que, pour un fluide élastique, l'équation de Cauchy (2) conduit à l'équation usuelle de l'hydrostatique :

$$\text{grad } p = \rho \underline{g} \quad (5)$$

En supposant le fluide de densité homogène  $\rho = \rho_0$  et la planète parfaitement sphérique, i.e.  $\Omega_t$  est une boule de rayon  $R$ , établir le profil de pression au sein de la planète en fonction de  $\rho_0, R$  et de la masse totale  $M_J$  de la planète.

Remarquer que le calcul précédent est fait sur la configuration actuelle observable et que l'opérateur gradient porte sur les coordonnées courantes. C'est un cas simple pour lequel la résolution est possible sur la configuration déformée.

**Application numérique :** estimer la pression au centre de la planète Jupiter constituée d'un noyau liquide et d'un manteau gazeux.

On prendra :  $M_J = 1.9 \cdot 10^{27}$  kg,  $R = 70000$  km,  $\rho_0 = 1326$  kg.m<sup>-3</sup>.

Comparer le résultat aux valeurs disponibles sur le net qui vont de  $3 \cdot 10^{12}$  Pa = 3000 GPa à  $10^{13}$  Pa = 10000 GPa selon les sources.

De meilleures estimations peuvent être obtenues en prenant en compte le fait que le noyau de Jupiter, de la taille de la Terre, est constitué de roches silicatées et de fer, et que le manteau est constitué d'hydrogène métallique ou liquide.

Le tenseur des contraintes d'un fluide élastique admet la représentation pression de la forme :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1}$$

où la pression est une fonction de la masse volumique<sup>2</sup>. On vérifie alors que l'équation (2) conduit effectivement à l'équation usuelle de l'hydrostatique.

Dans le cas d'une planète sphérique de masse volumique homogène, cette équation fournit :

$$p' = -\rho_0 \frac{M_J \mathcal{G}}{R^3} r$$

car  $M(r) = M_J r^3 / R^3$ , et  $p'$  est la dérivée de la pression par rapport à  $r$ . L'équation s'intègre en

$$p(r) = \rho_0 \frac{M_J \mathcal{G}}{2R} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

La constante d'intégration a été déterminée en considérant une pression nulle en  $r = R$ . La pression au centre de la planète est donc

$$p_{\odot} = \rho_0 \frac{M_J \mathcal{G}}{2R} \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>Une telle représentation n'est pas suffisante pour les fluides visqueux ou viscoélastiques.

Pour Jupiter, on trouve  $p_{\odot} = 1200$  GPa, c'est-à-dire près de 2 à 5 fois moins que la valeur annoncée.

Une meilleure estimation peut être obtenue en renonçant à l'hypothèse d'une masse volumique homogène au sein de Jupiter. A partir des informations disponibles sur le net, le noyau de Jupiter est constitué de roches silicatées et de fer, sans doute à l'état liquide, pour  $r \leq R_1 = 6500$  km. Vient ensuite une couche d'hydrogène métallique liquide pour  $R_1 \leq r \leq R_2$  où  $R_2$  est estimé à 30000 km. L'hydrogène liquide ou gazeux constitue les couches supérieures du manteau. Les densités correspondantes de ces trois couches sont respectivement estimées à  $\rho_1 = 25000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 2100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\rho_3 = 1240 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Dans chaque domaine, on intègre l'équation

$$p'(r) = -\rho \frac{\mathcal{G}}{r^2} M(r)$$

ce qui donne

$$p_1(r) = -\frac{2\pi\mathcal{G}}{3}\rho_1^2 r^2 + C_1, \quad 0 \leq r \leq R_1$$

$$p_2(r) = \frac{4\pi R_1^3 \mathcal{G}}{3r}\rho_2(\rho_1 - \rho_2) - \frac{2\pi\mathcal{G}}{3}\rho_2^2 r^2 + C_2, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$p_3(r) = \frac{4\pi\mathcal{G}}{3}\rho_3((\rho_1 - \rho_2)R_1^3 + (\rho_2 - \rho_3)R_2^3)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{2\pi\mathcal{G}}{3}\rho_3^2(R^2 - r^2), \quad R_2 \leq r \leq R$$

L'expression de  $p_3$  tient compte du fait que  $p_3(r = R) = 0$  tandis que les constantes  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent en écrivant la continuité de  $p$  en  $R_1$  et  $R_2$ . Le profil de pression ainsi calculé est représenté sur la figure 1. On voit clairement la forte augmentation de pression près du centre. La valeur au centre s'approche des valeurs annoncées. Elle est toutefois très sensible au choix de la masse volumique du cœur, valeur qui semble insuffisamment connue.

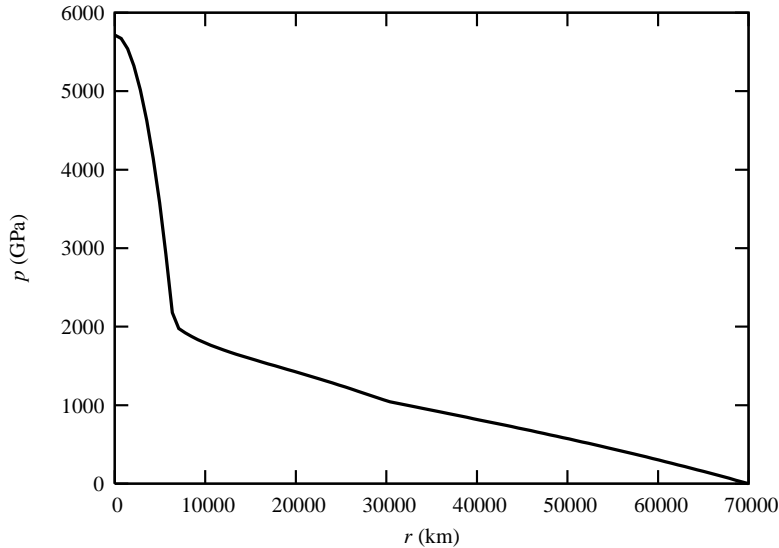


FIG. 1 – Profil de pression estimé pour la planète Jupiter.

### 3 Planète solide

Certaines planètes et satellites naturels se présentent sous forme solide. Le but de cette partie est d'examiner la pertinence du traitement de tels corps comme des milieux élastiques dans l'hypothèse des petites perturbations. Le corps est considéré comme isotrope et homogène de masse volumique  $\rho_0$  et de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

L'analyse proposée consiste à considérer un corps comme une boule de rayon  $R$  dans sa configuration de référence naturelle et à déterminer les contraintes engendrées par la mise en place des efforts dus à la gravitation. Elle ne prend pas en compte le processus réel de formation de la planète mais elle a le mérite de fournir, dans certaines conditions qui seront discutées, un ordre de grandeur des contraintes régnant dans une planète ou un satellite.

Donner l'équation d'équilibre statique local tenant compte des efforts de gravitation dans le cas d'une planète sphérique homogène, dans l'hypothèse des petites perturbations.

La première loi de Cauchy s'écrit dans ce cas :

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho_0^2 \frac{4\pi\mathcal{G}}{3} r \underline{\boldsymbol{e}}_r \quad (7)$$

#### 3.1 Équation différentielle régissant le déplacement

L'inconnue principale du problème est, pour des raisons que l'on indiquera, le déplacement radial  $u(r)$ , fonction de  $r$  seulement. En suivant la méthode des déplacements dans le cas statique, montrer que le déplacement est solution de l'équation différentielle suivante :

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u - \rho_0^2 \frac{4\pi\mathcal{G}}{3(\lambda + 2\mu)}r = 0 \quad (8)$$

où  $u'$  est la dérivée de la fonction  $u(r)$  par rapport à  $r$ .

Le problème est à symétrie sphérique de sorte que le déplacement est de la forme  $\underline{\boldsymbol{u}} = u(r)\underline{\boldsymbol{e}}_r$ . Le gradient de la transformation est calculé dans le système de coordonnées sphériques :

$$\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{u}} = u' \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{u}{r} (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Les contraintes sont calculées grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda\frac{u}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2(\lambda + \mu)\frac{u}{r} + \lambda u'$$

L'équation de bilan (7) en coordonnées sphériques fournit la seule équation non triviale suivante :

$$\sigma'_{rr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \rho_0^2 \frac{4\pi\mathcal{G}}{3} r = 0 \quad (9)$$

En substituant les expressions des contraintes en fonction du champ de déplacement, on trouve l'équation différentielle (8).

### 3.2 Détermination complète du déplacement

Montrer que la résolution de l'équation différentielle précédente conduit à un déplacement de la forme

$$u(r) = Ar + Kr^3 \quad (10)$$

Déterminer complètement les constantes  $A$  et  $K$  en fonction des propriétés du milieu et de la constante de gravitation.

L'équation différentielle homogène associée à (8) conduit à

$$(u' + \frac{2u}{r})' = 0$$

dont les solutions sont de la forme  $u = Ar + B/r^2$  où  $A$  et  $B$  sont des constants d'intégration. Une solution particulière de (8) est  $u = Kr^3$  avec

$$K = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15(\lambda + 2\mu)} \quad (11)$$

L'absence de singularité attendue en  $r = 0$  exige que  $B = 0$ . Le déplacement est donc de la forme (10).

La détermination de la constante  $A$  est possible en prenant en compte la condition de surface libre en  $r = R$  puisque la pression atmosphérique est négligée :  $\sigma_{rr}(r = R) = 0$ , ce qui fournit

$$A = -\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}KR^2$$

### 3.3 Vérification du contexte infinitésimal

Indiquer les conditions garantissant que le contexte infinitésimal est respecté dans l'analyse précédente.

On prêtera une attention toute particulière aux conditions relatives à la linéarisation des efforts volumiques.

**Application numérique :** indiquer dans quelle mesure les conditions précédentes sont satisfaites dans le cas de la Terre :

$$R_{Terre} = 6370 \text{ km}, \quad \rho_{Terre} = 5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Terre} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

puis de la Lune :

$$R_{Lune} = 1737 \text{ km}, \quad \rho_{Lune} = 3350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Lune} = 7.3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Dans les deux cas, on prendra les modules de rigidité typiques d'une roche<sup>3</sup> :  $\lambda = \mu = 30\text{GPa}$ .

---

<sup>3</sup> Le cas  $\lambda = \mu$  correspond à un coefficient de Poisson égal à 0.25, valeur souvent prise par défaut en l'absence de mesures précises (délicates pour  $\nu$ ).

Revenons aux expressions des déformations

$$\varepsilon_{rr} = A + 3Kr^2 = K\left(3r^2 - \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}R^2\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A + Kr^2 = K\left(r^2 - \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}R^2\right)$$

Ces déformations présentent des extrema en  $r = 0$  et  $r = R$ . Le contexte infinitésimal exige que :

$$|\varepsilon_{rr}(r = 0)| = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}KR^2 = \left| \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15(\lambda + 2\mu)}R^2 \right| \ll 1$$

Pour  $\lambda = \mu$ , cette exigence se résume à

$$\frac{22\pi}{225} \frac{\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{\mu} \simeq \frac{\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{3\mu} \ll 1 \quad (12)$$

Quant à

$$\varepsilon_{rr}(r = R) = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2\mu}KR^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r = R) = -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}2KR^2$$

l'exigence correspondante,

$$\frac{8\pi}{225} \frac{\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{\mu} \simeq \frac{\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{10\mu} \ll 1$$

est moins sévère que (12).

La linéarisation de l'équation d'équilibre statique requiert une linéarisation des efforts volumiques liés à  $\underline{\mathbf{g}} = g(r)\underline{\mathbf{e}}_r$  :

$$g(r + u) = g(r) + \frac{\partial g}{\partial r}u + o(u)$$

Le contexte infinitésimal, avec  $g(r) = -\rho_0^2 4\pi\mathcal{G}r/3(\lambda + 2\mu)$ , exige que

$$\left| \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial r} u(r) \right| = \left| \frac{u}{r} \right| \leq 1$$

ce qui est garanti par le fait que  $|\varepsilon_{\theta\theta}| \ll 1$ . La condition de linéarisation des efforts volumiques n'ajoute donc pas de limitation supplémentaire par rapport à (12).

Si l'on considère que la constante de gravitation n'est pas un paramètre contrôlable, il résulte de (12) que le produit rayon  $\times$  densité de la planète considérée ne doit pas excéder

$$\rho_0 R = \sqrt{\frac{3\mu}{\mathcal{G}}}$$

Dans le cas de la Terre, le terme  $\rho_0^2\mathcal{G}R^2/3\mu$  est de l'ordre de 1, de sorte que le contexte infinitésimal n'est pas respecté. Pour que l'analyse soit pertinente, il faudrait que le rayon de la Terre ne dépasse pas typiquement 1000 km.

Dans le cas de la Lune, le terme  $\rho_0^2\mathcal{G}R^2/3\mu$  est de l'ordre de 0.02, ce qui est acceptable dans le contexte infinitésimal.

Il s'ensuit que l'analyse proposée est pertinente pour la Lune mais pas dans le cas de la Terre.

### 3.4 Étude des déformations de la planète

Montrer que tous les points matériels du corps subissent une contraction de leur volume mais qu'il existe un rayon critique, à déterminer, au-delà duquel la déformation radiale,  $\varepsilon_{rr}$ , devient positive.

Calculer la réduction de volume de la planète due aux forces de gravitation.

La variation relative de volume en un point matériel est donnée, dans le contexte infinitésimal, par la trace du tenseur des déformation :

$$\begin{aligned} \text{trace } \underline{\underline{\varepsilon}} &= 3A + 5Kr^2 = K \left( 5r^2 - 3 \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} R^2 \right) \\ &\leq KR^2 \left( 5 - 3 \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) = -KR^2 \frac{8\mu}{3\lambda + 2\mu} \leq 0 \end{aligned}$$

La variation relative de volume est donc négative en tout point.

Cependant une expansion radiale  $\varepsilon_{rr} > 0$  existe toujours pour  $r \geq r_c$  donné par

$$r_c = \sqrt{-\frac{A}{3K}} = R \sqrt{\frac{5\lambda + 6\mu}{3(3\lambda + 2\mu)}}$$

Ce rayon  $r_c$  est toujours inférieur à  $R$  si  $\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} < 3$ , ce qui équivaut à  $\lambda > 0$ , condition elle-même équivalente à  $\nu > 0$ . Cette dernière relation, non universelle on le sait, est cependant remplie pour les matériaux typiques constituant les corps célestes. En conséquence, il existe toujours une couche d'expansion radiale près de la surface.

La planète sphérique de rayon  $R$  se transforme en boule de rayon  $R + u(R)$ . La variation de volume de la planète se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{v}{V} &= \left( 1 + \frac{u(R)}{R} \right)^3 \simeq 1 + 3 \frac{u(R)}{R} \\ \frac{v - V}{V} &= 3A + 3KR^2 = -6KR^2 \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{16\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{5(3\lambda + 2\mu)} \end{aligned}$$

### 3.5 Pression au centre de la planète

Montrer que la pression  $p_\odot$  au centre de la boule étudiée se met sous la forme

$$p_\odot = \frac{\rho_0 g_R R}{10} \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad (13)$$

où  $g_R$  est la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète, et  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la planète.

Comparer cette expression à la relation obtenue pour la planète fluide. Commenter.

**Application numérique :** comparer les pressions obtenues aux valeurs annoncées pour la Lune et pour la Terre, à savoir  $p_\odot = 5$  GPa et  $p_\odot = 350$  GPa, respectivement.



Les contraintes sont données par les fonctions :

$$\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A + (5\lambda + 6\mu)Kr^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (3\lambda + 2\mu)A + (5\lambda + 2\mu)Kr^2$$

La pression au centre de la planète est donc

$$p_{\odot} = -\sigma_{rr}(r=0) = -\sigma_{\varphi\varphi}(r=0) = (5\lambda + 6\mu)KR^2 = 2\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2 \frac{5\lambda + 6\mu}{15(\lambda + 2\mu)} = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{15} \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad (14)$$

L'accélération de la pesanteur à la surface  $r = R$  de la planète est

$$g_R = g(r=R) = \rho_0 R \frac{4\pi\mathcal{G}}{3}$$

Le résultat (13) en découle.

La relation (6) obtenue dans le cas de la planète fluide se met sous la forme

$$p_{\odot} = \frac{\rho_0 g_R R}{2}$$

Le fluide élastique est obtenu à partir du solide élastique isotrope dans le cas limite où le module de cisaillement s'annule. Dans ce cas la compressibilité est égale au module  $\lambda = \kappa$ . En reprenant l'expression de  $p_{\odot}$  La relation (6) correspond donc au cas limite de l'expression (14) utilisant les coefficients de Lamé. Il est possible d'utiliser l'expression comportant  $\nu$ , à conditions de prendre la valeur limite  $\nu = 0.5$  exigée par le fait que la compressibilité du fluide  $3\kappa = E/(1 - 2\nu)$  ne peut prendre une valeur finie que dans ce cas (puisque  $\mu = 0$  implique  $E = 0$ ). Mais ce cas singulier ne doit pas être confondu avec la propriété d'incompressibilité du fluide évidemment non satisfaite ici puisque  $\chi = \lambda = \kappa$  admet une valeur finie caractérisant le fluide élastique. Noter enfin que la relation (13) a été obtenue, pour le fluide, dans un contexte plus général, sans faire appel à l'hypothèse des petites perturbations.

L'expression (13) fournit les pressions au centre de la Terre et de la Lune :

$$p_{\odot}^{Terre} = 130 \text{ GPa}, \quad \text{et} \quad p_{\odot}^{Lune} = 3.5 \text{ GPa}$$

La valeur trouvée pour la Terre a le bon ordre de grandeur mais est néanmoins deux fois plus faible que la valeur attendue. Cela dit, on a vu que l'analyse sort du contexte infinitésimal dans le cas de la Terre. L'ordre de grandeur obtenu pour la Lune est meilleur. À noter que la valeur précédente est obtenue pour  $\nu = 0.25$  correspondant à la roche choisie. Si une valeur  $\nu = 0.5$  est utilisée (cas du fluide élastique), on obtient  $p_{\odot} = 4.7 \text{ GPa}$ , ce qui est très proche de la valeur annoncée. La Lune possède un noyau liquide et un manteau solide, configuration qui sera prise en compte dans la prochaine partie.

### 3.6 Limites de l'approche

Exprimer les contraintes  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ . Étudier notamment les valeurs obtenues en surface. En quoi ne sont-elles pas très réalistes? Quelle(s) hypothèse(s) de l'approche proposée pourrait être remise en question à ce propos?

Une autre limitation de l'approche est liée au fait que le comportement de la roche est supposé élastique alors que les valeurs numériques obtenues pour la Lune par exemple suggèrent que la limite d'élasticité soit systématiquement dépassée.

Pour le voir, on considère le critère de plasticité de Tresca qui stipule que la limite d'élasticité est atteinte en un point donné lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_0$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement la plus grande et la plus petite des contraintes principales en ce point. Le cisaillement maximal est  $\tau_0$ . En imaginant que l'on puisse accroître la constante de gravitation de 0 jusqu'à la valeur connue, indiquer pour quelle valeur de  $\mathcal{G}$  et à quel endroit de la planète la plasticité va commencer.

En considérant ensuite la valeur connue de  $\mathcal{G}$ , déterminer le rayon maximal du corps céleste solide pour que la limite d'élasticité ne soit jamais atteinte.

**Application numérique :** calculer ce rayon critique pour un corps ayant la même masse volumique que la Lune et une limite d'élasticité typique  $\tau_0 = 100$  MPa. Commenter.

La prise en compte de la plasticité sera considérée à la fin de la partie suivante qui aborde une configuration plus réaliste des corps tels que la Lune et la Terre.

La valeur des contraintes orthoradiales à la surface de la planète est :

$$\sigma_{\theta\theta}(r = R) = -4\mu KR^2$$

Elle est négative et de l'ordre de -1 GPa dans le cas de la Lune. Pour la Terre, la valeur est de -45 GPa... Cela indique que creuser un tunnel dans le sol serait une tâche particulièrement ardue! On s'attendrait plutôt à ce que les contraintes orthoradiales soient plutôt quasi-nulles en surface mais l'analyse proposée conduit inmanquablement à des contraintes négatives très fortes en surface. Le critère de Tresca n'est pas bien adapté aux roches dont la limite d'élasticité diffère en général en traction et en compression mais il sera suffisant, on le verra dans la dernière partie du problème, pour fournir des contraintes orthoradiales plausibles.

Le cisaillement maximal en tout point du corps vaut :

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 4\mu Kr^2$$

Il est en outre maximal à la surface  $r = R$ . La plasticité apparaît donc dès que

$$K = \frac{\tau_0}{2\mu R^2} \implies \mathcal{G}_{critique} = \frac{15(\lambda + 2\mu)}{4\pi R^2 \rho_0^2 \mu} \tau_0$$

D'autre part, la plasticité n'apparaîtra pas si le rayon du corps est suffisamment petit

$$4\mu KR^2 < 2\tau_0 \iff R < R_c = \sqrt{\frac{15(\lambda + 2\mu)\tau_0}{4\pi\mu\rho_0^2\mathcal{G}}}$$

Cette valeur critique vaut  $R_c = 420$  km pour la Terre et  $R_c = 690$  km pour la Lune.

## 4 Planète possédant un noyau fluide et un manteau solide

La structure interne des planètes et satellites comporte souvent un noyau liquide de rayon  $a$  entouré d'un manteau solide d'épaisseur  $R - a$ . L'objectif de cette partie du problème est

de la prendre en compte dans l'analyse des contraintes induites par les forces de masse. La Terre comporte en outre une graine solide au sein du noyau. L'existence d'une graine solide n'est pas intégrée dans la présente analyse pour des raisons de brièveté mais conduit à des développements très similaires.

Le noyau et la planète elle-même sont des boules concentriques de rayons  $a$  et  $R$ , respectivement. Pour simplifier le problème, on considérera la même masse volumique de référence  $\rho_0$  pour le manteau et le noyau. Le manteau est constitué d'une roche dont le comportement est décrit par une loi d'élasticité linéarisée (coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ).

L'analyse est réalisée sous l'hypothèse des petites perturbations par rapport à un état naturel de référence pour les deux matériaux.

## 4.1 Loi de comportement du noyau fluide

Le noyau liquide est représenté par un milieu fluide élastique dont la loi de comportement relie la pression à la masse volumique du milieu de la manière suivante :

$$p(\rho) = \chi \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (15)$$

où  $\chi$  est la caractéristique élastique du milieu.

Il est possible d'identifier formellement la loi de comportement précédente avec la loi de Hooke d'un solide élastique isotrope. A quelles valeurs des coefficients de Lamé, exprimés en fonction de  $\chi$ , correspond-elle ?

La représentation des efforts intérieurs du fluide élastique est  $\underline{\sigma} = -p\mathbf{1}$ . La partie déviatorique des contraintes est nulle ce qui exige  $\mu = 0$  dans la loi de Hooke. La loi de Hooke fournit alors

$$p = -\frac{1}{3}\text{trace } \underline{\sigma} = -\lambda \text{trace } \underline{\varepsilon}$$

La trace du tenseur des déformations est reliée à la variation de masse volumique du point matériel par :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \text{trace } \underline{\varepsilon} \quad \implies \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \text{trace } \underline{\varepsilon}$$

dans le contexte infinitésimal. L'identification de la loi de Hooke avec la relation (15) conduit donc à  $\chi = \lambda = \kappa$ . Le paramètre  $\chi$  est donc le module de compressibilité du fluide.

## 4.2 Détermination du champ de déplacement

L'inconnue principale du problème est à nouveau la composante radiale du déplacement, notée  $u(r)$  pour  $0 \leq r \leq a$  et  $u_1(r)$  pour  $a \leq r \leq R$ .

Donner les équations différentielles régissant  $u$  et  $u_1$ .

Donner la forme des solutions. Montrer qu'elles font intervenir 4 constantes d'intégration,  $A, A_1, B, B_1$  et les deux constantes :

$$K = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15\chi}, \quad K_1 = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15(\lambda + 2\mu)}$$

Dans le fluide, l'équation d'équilibre est donnée par

$$\text{grad } p = \rho_0 \underline{\mathbf{g}} = -\frac{4\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3} r \underline{\mathbf{e}}_r$$

Or  $p = -\chi \text{trace } \underline{\underline{\varepsilon}} = -\chi(u' + 2u/r)$ , de sorte que l'équation différentielle dans le fluide est

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u - 10Kr = 0, \quad r \leq a$$

Le déplacement dans le matériau solide est donné par l'équation (8) :

$$u_1'' + \frac{2}{r}u_1' - \frac{2}{r^2}u_1 - 10K_1r = 0, \quad a \leq r \leq R$$

Les champs solutions sont de la forme :

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r^2} + Kr^3, \quad u_1(r) = A_1r + \frac{B_1}{r^2} + K_1r^3 \quad (16)$$

### 4.3 Conditions aux limites et d'interface

Donner les quatre conditions permettant de déterminer les constantes d'intégration précédentes.

Poser le système d'équations linéaires dont ces constantes sont les solutions. On ne demande pas de résoudre ce système.

L'absence de singularité dans le noyau exige que  $B = 0$ .

La condition cinématique à l'interface  $r = a$  est que le déplacement y soit continu :

$$Aa + Ka^3 = A_1a + \frac{B_1}{a^2} + K_1a^3 \quad (17)$$

Pour passer aux conditions statiques, il faut calculer les contraintes :

$$\sigma_{rr} = \chi(3A + 5Kr^2) = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}, \quad r \leq a$$

$$\sigma_{rr}^1 = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{r^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1r^2, \quad a \leq r \leq R$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = (3\lambda + 2\mu)A_1 + 2\mu\frac{B_1}{r^3} + (5\lambda + 2\mu)K_1r^2, \quad a \leq r \leq R$$

La condition de surface libre en  $r = R$  se traduit par

$$\sigma_{rr}^1(R) = 0 = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{R^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1R^2 \quad (18)$$

La continuité du vecteur-contrainte à l'interface  $r = a$  se traduit par la continuité de la composante  $\sigma_{rr}$  :

$$\sigma_{rr}(a) = \sigma_{rr}^1(a) = \chi(3A + 5Ka^2) = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{a^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1a^2 \quad (19)$$

On est donc amené à résoudre le système portant sur les inconnues  $A, A_1, B_1$  :

$$\begin{bmatrix} 3\lambda + 2\mu & -\frac{4\mu}{R^3} & 0 \\ 3\lambda + 2\mu & -\frac{4\mu}{a^3} & -3\chi \\ a & \frac{1}{a^2} & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5\lambda + 6\mu)K_1R^2 \\ (5\chi K - (5\lambda + 6\mu)K_1)a^2 \\ (K - K_1)a^3 \end{bmatrix}$$

## 4.4 Discussion des résultats

La résolution du système précédent conduit à la détermination des déplacements, des déformations et des contraintes au sein de la planète. Les profils correspondants sont donnés sur la figure 2 pour la Terre et la Lune avec les caractéristiques suivantes :

Lune :  $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ ,  $\rho_0 = 3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $a = 500 \text{ km}$ .

Terre :  $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ ,  $\rho_0 = 5500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $a = 3500 \text{ km}$ .

Commenter l'ensemble de ces résultats. De nombreuses remarques s'imposent.

Finalement, constatez-vous une amélioration du réalisme des résultats par rapport à ceux obtenus en considérant la planète comme un solide homogène ?

Toutes les courbes présentent soit une discontinuité, soit un changement de pente à l'interface entre le noyau et le manteau. Commençons par les contraintes. Les contraintes radiales s'annulent en surface et sont continues en  $r = a$ , comme il se doit. Les contraintes orthoradiales ne sont pas continues à l'interface, ce qui est licite. Les contraintes radiales et orthoradiales sont égales dans le noyau (tenseur des contraintes sphérique) mais il n'en va pas de même des déformations. Les déformations orthoradiales sont continues à l'interface, au contraire des déformations radiales qui subissent un saut. La continuité des déformations orthoradiales s'explique par le fait que le déplacement est continu tout au long de l'interface  $r = a$ . Les dérivées tangentielles du déplacement de part et d'autre de l'interface doivent donc coïncider. Les déformations sont négatives sauf en ce qui concerne la déformation radiale au-delà d'un rayon critique proche de la surface, comme prévu dans une analyse précédente.

Les ordres de grandeur des déformations de la Lune (2% typiquement) sont acceptables dans le contexte infinitésimal. Ce n'est pas le cas pour la Terre où les déformations dépassent 100%, ce qui ôte toute confiance dans les résultats obtenus même si les ordres de grandeur sont indicatifs. Les pressions au centre de la planète ne sont pas vraiment modifiées par la prise en compte de la structure interne de la planète, par rapport au cas homogène. Il n'y a donc pas d'amélioration de l'estimation de ces pressions par rapport aux valeurs disponibles.

L'hypothèse d'une masse volumique homogène est acceptable pour la Lune mais pas dans le cas de la Terre ( $\rho_0 = 11000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  dans le noyau et  $\rho_0 = 4500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  dans le manteau), une telle hétérogénéité pourrait être prise en compte aisément.

Cette discussion confirme que l'hypothèse d'élasticité du manteau est discutable. La question de la plasticité est examinée dans la dernière question.

## 4.5 Plasticité du manteau

Pour des planètes suffisamment massives, il est légitime de considérer que l'ensemble des points matériels du manteau ont atteint la limite d'élasticité. En l'absence d'écroutissage ou d'endommagement, ce contexte de plasticité généralisée se traduit par le fait que

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\tau_0, \quad \text{pour tout } a \leq r \leq R \quad (20)$$

En prenant en compte ce fait, reprendre l'équation d'équilibre en contraintes et la résoudre pour les points du manteau.

En supposant que le noyau reste un fluide élastique, obtenir le champ de contraintes sur toute la planète. On ne demande pas de déterminer les déformations, ni le déplacement.

Montrer enfin que cette solution fournit une excellente estimation de la pression au centre

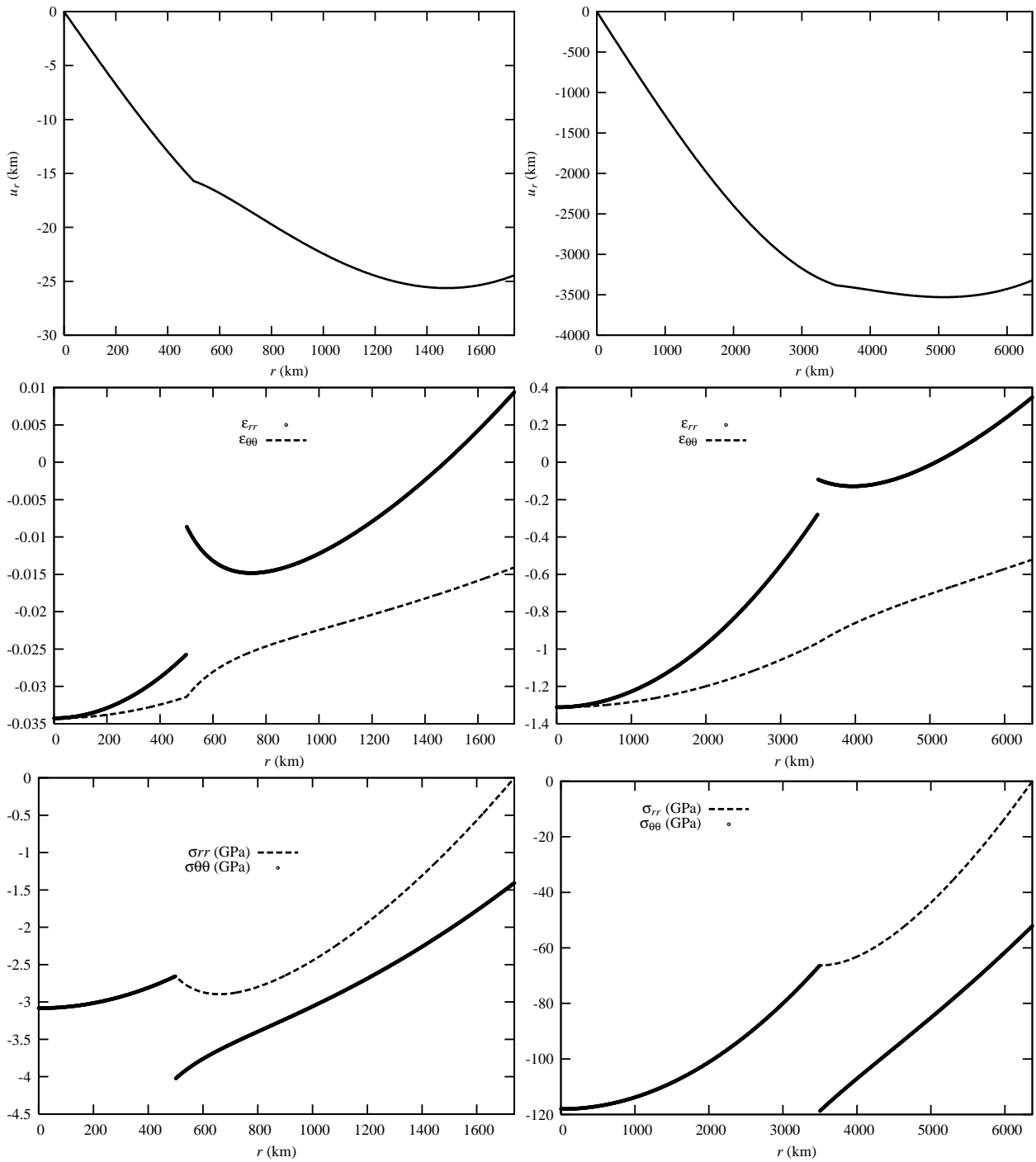


FIG. 2 – Profils de déplacement (haut), déformations (milieu) et contraintes (bas). Les courbes de la colonne de gauche (resp. droite) concernent la Lune (resp. la Terre).

de la Lune mais aussi des contraintes plausibles en surface, contrairement aux estimations précédentes.

Dans le noyau fluide, la pression est déduite de l'équation de l'hydrostatique :

$$p' = -\frac{4\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}r \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{rr} = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}r^2 + C$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

Dans le manteau solide, l'équation locale de l'équilibre est donnée par (9). Lorsque la condition de plasticité généralisée (20) est prise en compte, elle devient :

$$\sigma'_{rr} + \frac{4\tau_0}{r} = \frac{4\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}r$$

qui s'intègre en

$$\sigma_{rr}^1(r) = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}(r^2 - R^2) - 4\tau_0 \ln \frac{r}{R} \quad (21)$$

La condition  $\sigma_{rr}^1(r = R) = 0$  a été prise en compte.

La constante d'intégration  $C$  s'obtient en écrivant la continuité de  $\sigma_{rr}$  à l'interface. Finalement

$$C = -\frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}R^2 - 4\tau_0 \ln \frac{a}{R}$$

La pression au centre de la planète est  $p_\odot = -C$ .

Pour la Lune, on trouve  $p_\odot = 5.2$  GPa, ce qui est en accord avec les valeurs en cours. La solution en plasticité généralisée permet de lever l'objection concernant les contraintes orthoradiales en surface. En effet,  $\sigma_{\theta\theta}(R) = -2\tau_0$ , c'est-à-dire de l'ordre de la limite d'élasticité de la roche ce qui est plausible. Ces résultats sont illustrés sur la figure 3.

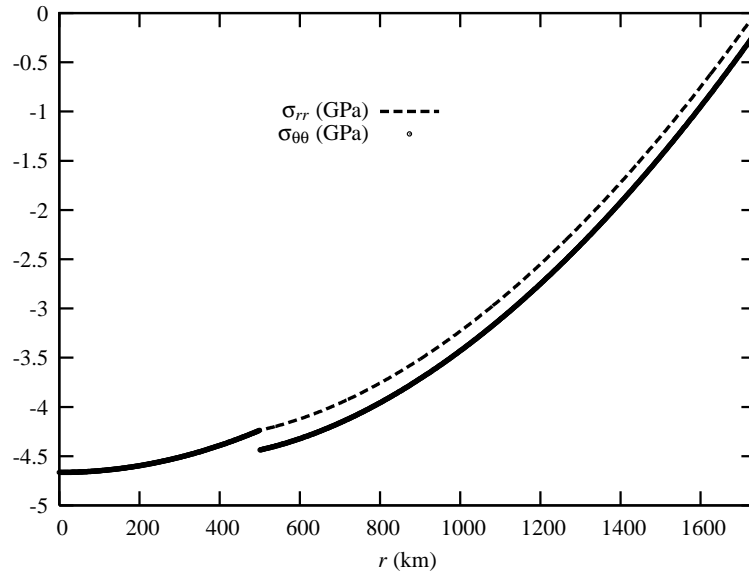


FIG. 3 – Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la Lune en considérant un noyau liquide et un manteau élastoplastique.

## 5 Complément : aplatissement aux pôles

Il est légitime de se demander si les efforts d'inertie dus à la rotation d'un corps céleste sur lui-même induisent des contraintes suffisantes pour concurrencer celles engendrées par la gravitation. La réponse est négative pour les corps examinés dans le problème précédent, tels que la Lune la Terre ou Jupiter. Pour l'établir, les cas d'une planète fluide et d'une planète solide sont examinés successivement.

### 5.1 Planète fluide en rotation

L'hydrostatique des fluides incompressibles permet classiquement de déterminer la forme d'une planète fluide soumise aux efforts de gravitation et à la rotation propre de vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $z$  des pôles. Le champ de pression  $p(r, z)$  est solution de

$$-\text{grad } p + \rho_0 \underline{\mathbf{g}} + \rho_0 \omega^2 r \underline{\mathbf{e}}_r = 0$$

sur la configuration déformée du corps, en coordonnées cylindriques. En adoptant l'expression du champ de gravitation (3) pour un corps quasi-sphérique et en supposant une masse volumique homogène  $\rho_0$  (hypothèse équivalente à l'incompressibilité), on obtient :

$$p(r, z) = \rho_0 \omega^2 r - \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 \mathcal{G}(r^2 + z^2) + Cste$$

L'équation du bord libre du corps s'obtient en écrivant le lieu des points où la pression s'annule :

$$z^2 + \left(1 - \frac{3}{4\pi} \frac{\omega^2}{\rho_0 \mathcal{G}}\right) r^2 = R_{eq}^2$$

où la constante  $R_{eq}$  désigne le rayon de l'équateur la planète déformée. On voit que l'analyse fait intervenir le rapport des effets d'inertie et de gravitation. Le calcul de ce terme pour les planètes envisagées montre que cette perturbation par rapport à 1 est de l'ordre du centième ou du millième. Le rayon aux pôle vaut donc :

$$R_{pole} \simeq R_{eq} \left(1 - \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{\rho_0 \mathcal{G}}\right)$$

Le calcul dans le cas de la Terre fournit un aplatissement aux pôles de 1/580. C'est la valeur trouvée par Huyghens en 1690. Newton améliore l'estimation en considérant une densité non homogène et se rapproche de la valeur mesurée 1/298.

### 5.2 Planète solide élastique isotrope homogène

A ce stage il est utile d'aborder le problème des contraintes induites dans une planète solide par les efforts d'inertie de rotation propre. Dans le cadre HPP, la solution de ce problème pourra être superposée à celle trouvée au paragraphe 3 pour la planète solide soumise aux efforts de gravitation. Les deux contributions pourront être comparées. On voit que l'analyse est très différente dans l'esprit que l'approche hydrostatique précédente.