CALCUL TENSORIEL

1 Algèbre tensorielle

Nous considérons un espace vectoriel euclidien E, de dimension N, sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Chaque élément $\overrightarrow{x}$ de cet espace sera appelé *vecteur*, et sera noté avec un trait dessous pour le différencier des *scalaires* du corps $\mathbb{R}$, par exemple λ.

Nous introduisons ici de façon très simplifiée la notion de tenseur euclidien. Dans un premier temps, nous définissons les composantes *covariantes* et *contravariantes* d'un vecteur $\overrightarrow{x}$, élément de E. Ensuite, nous introduisons la définition des tenseurs euclidiens et de leurs composantes. Enfin, les opérations classiques sur les tenseurs sont expliquées.

1.1 Composantes d'un vecteur

Nous considérons un vecteur quelconque $\overrightarrow{x}$ de E, et un ensemble de N vecteurs de base $\overrightarrow{a}_i$. Il existe deux façons différentes d'exprimer les composantes de $\overrightarrow{x}$ dans cette base :

- On peut décomposer $\overrightarrow{x}$ sur ces vecteurs pour obtenir :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{N} x^i \overrightarrow{a}_i \text{ souvent noté } \overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{a}_i \tag{1}$$

  Dans cette équation, une sommation implicite est effectuée sur les indices répétés en positions supérieure et inférieure dans un produit. C'est la convention de sommation dite d'*Einstein*.
- On peut effectuer le produit scalaire de $\overrightarrow{x}$ avec ces vecteurs pour obtenir :

$$x_i = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{a}_i \tag{2}$$

> Le produit scalaire entre deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E est ici noté $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$. C'est un élément de $\mathbb{R}$. Il provient du caractère euclidien de l'espace vectoriel E, et possède différentes propriétés. Par exemple, si $\overrightarrow{x}$ est non nul, alors $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{x}$ est strictement positif.

Les scalaires x^i et x_i ainsi obtenus sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base des $\overrightarrow{a}_i$. Elles peuvent être reliées entre elles par la relation :

$$x_i = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{a}_i = \left(x^j\overrightarrow{a}_j\right).\overrightarrow{a}_i = g_{ij}x^j \text{ avec } g_{ij} = \overrightarrow{a}_i.\overrightarrow{a}_j \tag{3}$$

Les termes g_{ij} ainsi définis forment une matrice symétrique de dimension NxN, qui caractérise la base des $\overrightarrow{a}_i$. En effet, g_{ii} représente le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{a}_i$, tandis que les termes non diagonaux donnent l'angle entre les vecteurs de base. Par exemple, dans une base orthonormée, les termes g_{ij} forment la matrice identité, et les composantes x^i et x_i d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ coïncident.

Les composantes x^i du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base des $\overrightarrow{a}_i$ sont dites *contravariantes*. En effet, si les vecteurs de base subissent une rotation, alors les composantes de $\overrightarrow{x}$ dans la nouvelle base seront obtenues en appliquant la rotation inverse.

Les composantes x_i du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base des $\overrightarrow{a}_i$ sont dites *covariantes*. En effet, si les vecteurs de base subissent une rotation, alors ces composantes seront modifiées en appliquant la même rotation.

Il est intéressant de définir ici l'ensemble des N vecteurs orthogonaux aux $\overrightarrow{a}_i$. Ces vecteurs sont en général notés $\overrightarrow{a}^i$, et sont tels que :

$$\overrightarrow{a}_i.\overrightarrow{a}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4}$$

On montre facilement que les vecteurs $\overrightarrow{a}^i$ forment une base de E. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ peut donc être décomposé sur cette base. On constate que les composantes covariantes x_i de $\overrightarrow{x}$ permettent de le décomposer sur cette base ($\overrightarrow{x} = x_i\overrightarrow{a}^i$), et que les composantes contravariantes x^i de $\overrightarrow{x}$ sont les produits scalaires de $\overrightarrow{x}$ sur cette base ($x^i = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{a}^i$). En définissant maintenant de façon analogue à précédemment les termes $g^{ij} = \overrightarrow{a}^i.\overrightarrow{a}^j$, qui forment aussi une matrice

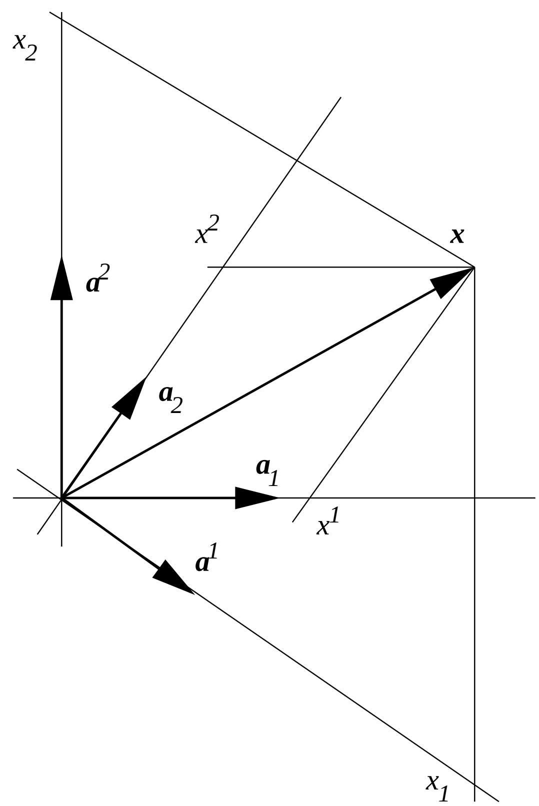

FIG. 1 – *Composantes d'un vecteur*

symétrique de dimension NxN, on peut écrire les relations fondamentales suivantes :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{a}_i = x_i \overrightarrow{a}^i \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} x^i = g^{ij} x_j \\ x_i = g_{ij} x^j \end{array} \right. \tag{5}$$

1.2 Composantes d'un tenseur

Les tenseurs sont construits sur la base d'une opération appelée "produit tensoriel", et notée $\otimes$. Nous nous limiterons ici au cas d'un seul espace vectoriel E, de sorte que nous ne considérerons que le produit tensoriel de E par lui-même (éventuellement plusieurs fois). Les propriétés du produit tensoriel sont telles que $E \otimes E$ (produit tensoriel de E par E) est lui-même un espace vectoriel. De plus, si les N vecteurs $\overrightarrow{a}_i$ forment une vase de E, alors les NxN vecteurs $\overrightarrow{a}_i \otimes \overrightarrow{a}_j$ forment une base d $E \otimes E$, qui est donc de dimension N^2.

Par définition, un tenseur euclidien d'ordre n est un élément de l'espace vectoriel issu du produit tensoriel de E par lui-même n fois, $E \otimes \ldots \otimes E$. Un tenseur d'ordre 1 est donc un élément de E, c'est-à-dire un vecteur. On peut alors définir ses composantes covariantes et contravariantes. Un tenseur d'ordre 2 est un élément de $E \otimes E$. On peut alors écrire ses composantes sous la forme :

$$\forall \underline{T} \in E \otimes E, \underline{T} = T^{ij} \overrightarrow{a}_i \otimes \overrightarrow{a}_j = T_{ij} \overrightarrow{a}^i \otimes \overrightarrow{a}^j = T_i^j \overrightarrow{a}^i \otimes \overrightarrow{a}_j = T_j^i \overrightarrow{a}_i \otimes \overrightarrow{a}^j \quad (6)$$

L'ordre d'un tenseur correspond donc au nombre d'indices sur ses composantes. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, $\underline{T}$, on remarque que l'on peut définir ses composantes covariantes T_{ij}, ses composantes contravariantes T^{ij}, et des composantes mixtes T_i^j. Il en est évidemment de même pour des tenseurs d'ordre supérieur.

Un tenseur d'ordre zéro est un scalaire invariant par changement de système de coordonnées. Un tenseur est dit symétrique par rapport à deux indices covariants ou deux indices contravariants si ses composantes restent inchangées dans une permutation des deux indices. Il sera dit antisymétrique par rapport à ces indices si ses composantes changent de signe dans une permutation.

Les termes g_{ij}, g^{ij}, $g_i^j = \delta_i^j$ et $g_j^i = \delta_j^i$ forment les composantes d'un tenseur symétrique appelé "tenseur métrique" ou "tenseur fondamental", noté $\underline{g}$, qui est d'une grande importance en calcul tensoriel. En effet, il permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. On peut d'ailleurs remarquer que les composantes contravariantes g^{ij} sont obtenues en "inversant" la matrice formée par les g_{ij}, tandis que les composantes "mixtes" g_i^j forment la matrice identité.

Il existe enfin pour les tenseurs un autre type de composantes, largement utilisé en physique, dans les espaces euclidiens. Ces composantes sont d'ailleurs appelées "composantes physiques". Ce sont les projections du tenseur sur les vecteurs de base de l'espace. Nous avons par exemple pour un vecteur $\overrightarrow{x}$ les composantes physiques x_I suivantes :

$$x_I = \overrightarrow{x} . \frac{\overrightarrow{a}_i}{\|\overrightarrow{a}_i\|} = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ij} x^j}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (7)$$

De même, pour un tenseur $\underline{A}$ d'ordre 2, les composantes physiques A_{IJ} s'obtiennent de la façon suivante :

$$A_{IJ} = \underline{A} : \frac{\overrightarrow{a}_i \otimes \overrightarrow{a}_j}{\|\overrightarrow{a}_i \otimes \overrightarrow{a}_j\|} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} = \frac{g_{ik}g_{jl}A^{kl}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \tag{8}$$

Dans le cas d'une base orthogonale, les composantes de la métrique forment une matrice diagonale, ce qui permet de simplifier les relations précédentes. Dans un système orthonormé, les composantes du tenseur métrique coïncident toutes avec la matrice identité. Il s'en suit que tous les types de composantes d'un tenseur sont identiques. Dans ce cas, les indices sont tous placés "en bas" en ne considérant que les composantes covariantes des tenseurs. En calcul matriciel, ceci est couramment utilisé. La convention de sommation d'Einstein est alors étendue aux indices répétés en même position (et non en haut et en bas comme c'est normalement le cas).

1.3 Opérations sur les tenseurs

La somme de deux tenseurs du même ordre est un tenseur également du même ordre, dont les composantes sont la somme des composantes des tenseurs ajoutés. Toutefois, il convient de sommer les composantes de même type uniquement. De même, la soustraction de deux tenseurs donne un tenseur dont les composantes sont obtenues par soustraction.

Le produit de deux tenseurs (produit tensoriel) se fait en multipliant les composantes. Par contre, dans ce cas, le tenseur obtenu a un ordre égal à la somme des ordres des tenseurs multipliés. De plus, le produit de composantes de types différents peut être réalisé. Notons enfin que l'on ne peut pas écrire n'importe quel tenseur comme le produit de deux tenseurs d'ordres inférieurs. Pour cette raison, la division des tenseurs n'est pas toujours possible.

Si on pose l'égalité entre un indice contravariant et un indice covariant des composantes d'un même tenseur, le résultat indique qu'on doit faire une sommation sur les indices égaux d'après la convention d'Einstein. La somme résultante est la composante d'un tenseur d'ordre $N-2$ où N est l'ordre du tenseur initial. Le procédé s'appelle une contraction. Par exemple, dans un tenseur $\underline{\underline{X}}$ d'ordre 4, si on applique une contraction à ses composantes X_{ij}^{kl} en posant $l = j$, on obtient les composantes $Y_i^k = X_{i1}^{k1} + \ldots + X_{iN}^{kN}$ d'un nouveau tenseur $\underline{Y}$ d'ordre 2.

Par un produit tensoriel de deux tenseurs suivi d'une contraction, on obtient un nouveau tenseur appelé *produit contracté* des tenseurs donnés. Par exemple, le produit d'un tenseur $\underline{\underline{X}}$ d'ordre 4 et d'un tenseur $\underline{Y}$ d'ordre 2 fournit un tenseur d'ordre 6. En effectuant une contraction d'indice, on obtient un tenseur $\underline{\underline{Z}}$ d'ordre 4 dont les composantes sont par exemple $Z^{im}_{kl} = X^{ij}_{kl} Y^m_j$.

L'exemple le plus courant de produit contracté est le produit scalaire. En effet, le produit tensoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ (d'ordre 1) donne normalement un tenseur d'ordre 2 $\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}$, dont les composantes sont les produits $x_i y_j$ (covariantes), $x^i y^j$ (contravariantes), $x_i y^j$ et $x^i y_j$ (mixtes). La contraction se fait en posant $i = j$ sur les composantes mixtes, de sorte que l'on retrouve $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x_i y^i = x^i y_i$. La notation du produit scalaire (le *point*) est donc souvent utilisée pour indiquer qu'il y a contraction sur un indice.

Parfois, on utilise un produit "doublement contracté" de deux tenseurs. Il y a alors sommation sur deux indices, et l'ordre du tenseur final est diminué de 4. C'est le cas par exemple de l'énergie de déformation élastique W (scalaire ou tenseur d'ordre 0), issue du produit doublement contracté entre les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}$ (ordre 2) et de déformations $\underline{\epsilon}$ (ordre 2). Dans ce cas, on indique cette double contraction par un *double point* ":", comme par exemple lorsque l'on écrit $W = \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} = \sigma^{ij} \epsilon_{ij}$.

2 Géométrie différentielle

Nous nous plaçons ici dans un espace ponctuel (affine) euclidien E_0, dont l'espace vectoriel associé E est de dimension N, muni d'un repère (R) d'origine O et d'un système de coordonnées curvilignes (x^i). Ce système de coordonnées est caractérisé par N fonctions plusieurs fois continûment différentiables reliant les coordonnées curvilignes x^i d'un point M à ses coordonnées X^i dans le repère (R). De plus, nous supposerons qu'il existe autour du point M une relation bi-univoque entre les x^i et les X^i. Les coordonnées curvilignes les plus utilisées en dimension 3 sont les coordonnées cylindriques (r,θ,z) et les coordonnées sphériques (r,θ,ϕ).

Dans un premier temps, nous définissons le repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes. Ensuite, nous étudions la variation de ce repère autour d'un point donné, variation caractérisée par les symboles de Christoffel. Enfin, nous introduisons les notions de différentielle absolue d'un tenseur et de dérivée covariante, qui sont à la base des opérateurs utilisés en physique (gradient, divergence, ...).

2.1 Repère naturel

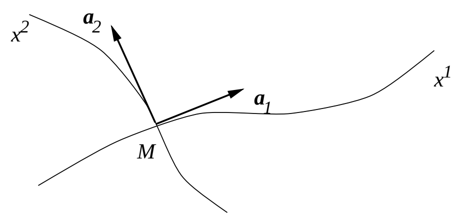

FIG. 2 – Repère naturel en un point de l'espace

En un point M de coordonnées curvilignes x^i, on définit un repère naturel de la façon suivante. L'origine du repère est fixée en M, et les vecteurs de base $\overrightarrow{a}_i$ sont définis par :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}_i dx^i \text{ soit } \overrightarrow{a}_i = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x^i} \tag{9}$$

Ce repère naturel est donc tangent aux lignes de coordonnées (figure 2). L'équation précédente montre que les dx^i sont les composantes contravariantes de $d\overrightarrow{OM}$ (vecteur de E) dans le repère naturel. Il est donc possible de définir le tenseur métrique (souvent appelé "métrique") de cet espace. Les composantes covariantes de ce tenseur sont issues du repère naturel ($g_{ij} = \overrightarrow{a}_i.\overrightarrow{a}_j$). Ce tenseur dépend du point M, origine du repère naturel, et donc de la position à laquelle on se trouve dans l'espace E_0.

Supposons maintenant que l'on définisse un nouveau système de coordonnées curvilignes (y^i). Au point M, un nouveau repère naturel sera constitué du point M et de vecteurs de base $\overrightarrow{b}_i$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{a}_i = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x^i} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\overrightarrow{b}_j = A_i^j\overrightarrow{b}_j \text{ avec } A_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \\ \overrightarrow{b}_j = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y^j} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\overrightarrow{a}_i = B_j^i\overrightarrow{a}_i \text{ avec } B_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \end{array} \right. \tag{10}$$

Cette équation montre qu'un changement de coordonnées curvilignes est caractérisé par un changement de repère naturel. Les composantes d'un tenseur changeront lorsque, en un point M fixé, on changera de système de coordonnées. Pour obtenir les nouvelles composantes du tenseur, on utilisera les relations de changement de base sur les vecteurs de base.

Les composantes d'un tenseur peuvent également changer lorsque l'on déplace le point M, tout en gardant le même système de coordonnées, puisque le repère naturel change. On parle alors de "champs de tenseurs".

2.2 Opérateurs différentiels

Nous avons vu que, en chaque point M de l'espace E_0, on pouvait caractériser la métrique de cet espace par un tenseur de composantes covariantes g_{ij}. Ainsi, si l'on se déplace de quantités dx^i dans le repère naturel des $\overrightarrow{a}_i$, l'élément de longueur engendré ds est obtenu par le produit scalaire, dans E, du vecteur $d\overrightarrow{x}$ de composantes dx^i avec lui-même. On obtient alors :

$$ds^2 = d\overrightarrow{x}.d\overrightarrow{x} = g_{ij}dx^i dx^j \tag{11}$$

Le problème fondamental en géométrie différentielle réside dans le fait que le repère naturel, et donc la métrique, dépend du point M de l'espace. Il s'en suit que deux tenseurs définis par leurs composantes par rapport à deux repères différents (ou en deux points distincts de l'espace) ne pourront être comparés que si l'on connaît le lien entre ces deux repères. L'objectif des symboles de Christoffel est de réaliser le lien entre deux repères naturels infiniment voisins $\overrightarrow{a}_i$ et $\overrightarrow{a}_i + d\overrightarrow{a}_i$.

Lorsque l'on déplace l'origine M du repère naturel d'une quantité $d\overrightarrow{x}$, les vecteurs de base $\overrightarrow{a}_i$ de ce repère se modifient d'une quantité $d\overrightarrow{a}_i$. En notant dans le repère naturel initial dx^i et dx_i les composantes de $d\overrightarrow{x}$ ($d\overrightarrow{x} = dx^i\overrightarrow{a}_i$, $dx_i = d\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a}_i$) et $d\omega_i^j$ et $d\omega_{ij}$ celles de $d\overrightarrow{a}_i$ ($d\overrightarrow{a}_i = d\omega_i^j\overrightarrow{a}_j$, $d\omega_{ij} = d\overrightarrow{a}_i.\overrightarrow{a}_j$), les symboles de Christoffel relient ces quantités sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_{kj} = \Gamma_{ikj}dx^i \\ d\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i \end{array} \right. \tag{12}$$

Les fonctions Γ_{ikj} et Γ_{ij}^k sont appelées symboles de Christoffel respectivement de première et de deuxième espèce. Il s'agit de N^3 fonctions reliées entre elles sous la forme $\Gamma_{ikj} = g_{kl}\Gamma_{ij}^l$ et $\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ilj}$ et définies en fonction du tenseur métrique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}) \\ \Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ilj} \end{array} \right. \tag{13}$$

Considérons maintenant un vecteur quelconque $\overrightarrow{u}$ défini par ses composantes contravariantes u^i dans le repère naturel des $\overrightarrow{a}_i$ au point M. Lorsque l'on va se déplacer d'un quantité infinitésimale sur le système de coordonnées curvilignes, les composantes de $\overrightarrow{u}$ vont être modifiées d'une quantité du^i, mais comme le repère naturel change également, un terme (souvent appelé "convectif") va venir s'ajouter à cette variation pour obtenir :

$$d\overrightarrow{u} = du^j \overrightarrow{a}_j + u^j d\overrightarrow{a}_j \tag{14}$$

Le dernier terme de cette équation est appelé "convectif". Il est dû à la variation du repère naturel au cours du déplacement dans l'espace. Il est illustré sur la figure 3, où un vecteur $\overrightarrow{u}$ est simplement transporté dans le système de coordonnées. On n'a donc pas de variation de ses coordonnées dans le repère initial ($du^i = 0$), mais ses nouvelles composantes (dans le nouveau repère naturel) sont tout de même modifiées.

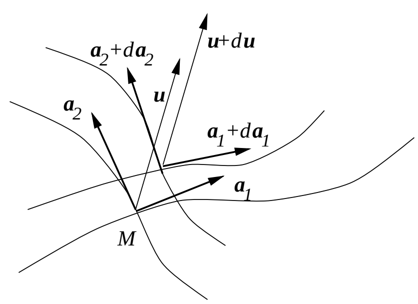

FIG. 3 – Transport d'un vecteur en coordonnées curvilignes

En utilisant les définitions précédentes, les composantes contravariantes du vecteur $d\overrightarrow{u}$ peuvent être écrites sous la forme :

$$d\overrightarrow{u} = (\Delta u^k)\overrightarrow{a}_k \text{ avec } \Delta u^k = du^k + u^j d\omega_j^k \tag{15}$$

On donne à Δu^k le nom de "différentielle absolue" de u^k. Il s'agit des composantes contravariantes du tenseur $d\overrightarrow{u}$, ce qui n'est pas le cas pour les termes du^k. Par abus de langage, on dit souvent que $d\overrightarrow{u}$ est la différentielle absolue de $\overrightarrow{u}$. En introduisant maintenant les dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes x^i, on peut écrire :

$$\Delta u^k = u^k_{,i} dx^i \text{ avec } u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j \tag{16}$$

Les termes $u^k_{,i}$ sont les composantes mixte d'un tenseur appelé "dérivée covariante" de $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}$ avait été donné par ses composantes covariantes u_k, alors le même raisonnement nous aurait conduit à définir la dérivée covariante de $\overrightarrow{u}$ par rapport à ses composantes covariantes. On peut résumer ces résultats par les formules suivantes :

$$\begin{array}{l} u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j \\ u_{k,i} = \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \Gamma^j_{ki} u_j \end{array} \tag{17}$$

La notion différentielle absolue et de dérivée covariante permet de définir les principaux opérateurs différentiels intervenant en physique :

- Le *gradient* d'un tenseur est à son tour un tenseur, dont les composantes sont les dérivées covariantes des composantes du tenseur de départ. Le gradient d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N+1$. Si f est un scalaire (tenseur d'ordre 0, invariant par changement de repère), le gradient de f est un tenseur d'ordre 1 (un vecteur) dont les composantes covariantes sont définies par $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur (tenseur d'ordre 1), le gradient de $\overrightarrow{u}$ est un tenseur d'ordre 2, dont les composantes covariantes et mixtes sont :

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k \text{ et } u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k \tag{18}$$

  Le gradient est largement présent dans les disciplines scientifiques. Il sert par exemple à définir les déformations en mécanique, et les forces motrices en thermique (gradient thermique) et en chimie minérale (gradients de potentiels chimiques ou d'activité).
- La *divergence* d'un tenseur est à son tour un tenseur, dont les composantes sont obtenues par contraction de sa dérivée covariante (son gradient) par rapport à son dernier indice contravariant. La divergence d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N-1$. La divergence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc le scalaire $u^i_{,i}$, tandis que celle d'un tenseur $\overrightarrow{A}$ d'ordre 2 est un vecteur dont les composantes contravariantes sont $A^{ij}_{,j}$.
  La divergence est largement présente dans les équations d'équilibre en mécanique, ainsi que dans les équations de conservation en thermique et en transfert de masse. Elle est principalement appliqué sur des tenseurs d'ordre 1 et 2.
- Le *rotationel* appliqué sur un vecteur $\overrightarrow{u}$ (tenseur d'ordre 1) est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes covariantes sont $u_{i,j} - u_{j,i}$. Du

fait de la symétrie des symboles de Christoffel de seconde espèce sur les indices covariants, les composantes covariantes du rotationel d'un vecteur s'écrivent simplement $\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}$. Le rotationel d'un vecteur est un tenseur anti-symétrie. Il est présent dans les équations de Maxwell en électromagnétisme. Il peut être écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

où R_1, R_2 et R_3 sont les composantes d'un *vecteur rotation* $\overrightarrow{R}$, parfois appelé *vecteur dual*.

– Le *laplacien* d'un tenseur, souvent noté Δ, est la divergence du gradient. Cet opérateur conserve donc l'ordre du tenseur. Appliqué sur une fonction scalaire f, on obtient le scalaire $\Delta(f) = (g^{ij} f_{,i})_{,i} = g^{ij} f_{,ji}$. Appliqué sur un vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient un tenseur d'ordre 1 dont les composantes covariantes sont $g^{kj} u_{i,jk}$.
  Le laplacien est largement utilisé dans les équations d'équilibre ou de bilan, lorsque le comportement du matériau est linéaire.

3 Opérateurs différentiels

3.1 Coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'espace est muni d'un repère orthonormé fixe. Donc, tous les types de composantes coïncident. Nous noterons ici x, y et z les trois directions de l'espace. Ceci nous permet de définir :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \tag{20}$$

– le gradient d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{21}$$

– la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$div(\overrightarrow{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{22}$$

– la divergence d'un tenseur $\underline{A}$ du second ordre :

$$\overrightarrow{div}(\underline{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{cases} \tag{23}$$

– le vecteur rotation associé au rotationel d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{cases} R_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ R_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ R_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases} \tag{24}$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{25}$$

– le laplacien d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases} \tag{26}$$

3.2 Coordonnées cylindriques

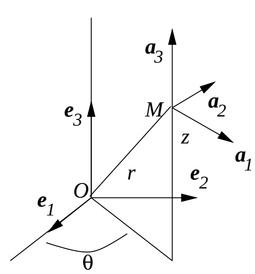

FIG. 4 – Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure 4). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère $(\overrightarrow{e}_i)$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E joignant les points O et M. Le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) est généré par un repère naturel $(\overrightarrow{a}_i)$ tel que, au voisinage du point M :

$$d\overrightarrow{u} = dx^1\overrightarrow{e}_1 + dx^2\overrightarrow{e}_2 + dx^3\overrightarrow{e}_3 = dr\,\overrightarrow{a}_1 + d\theta\,\overrightarrow{a}_2 + dz\,\overrightarrow{a}_3 \tag{27}$$

avec la relation suivante entre les coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = r\cos\theta \\ x^2 = r\sin\theta \\ x^3 = z \end{array}\right. \tag{28}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{a}_i$ ont donc comme composantes dans le repère orthonormé :

$$\overrightarrow{a}_1 = \left|\begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{array}\right. , \overrightarrow{a}_2 = \left|\begin{array}{l} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{array}\right. , \overrightarrow{a}_3 = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right. \tag{29}$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{30}$$

Les composantes physiques d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = ru^2 \\ u_z = u_3 = u^3 \end{array}\right. \tag{31}$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre $\underline{A}$ seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} = A^{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} = rA^{12} & A_{rz} = A_{13} = A^{13} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} = rA^{21} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} = r^2A^{22} & A_{\theta z} = \frac{A_{23}}{r} = rA^{23} \\ A_{zr} = A_{31} = A^{31} & A_{z\theta} = \frac{A_{32}}{r} = rA^{32} & A_{zz} = A_{33} = A^{33} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont obtenus à l'aide de leur définition et de la métrique définie précédemment sous la forme :

$$\Gamma_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\Gamma_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

L'ensemble de ces équations permet de retrouver l'expression des opérateurs physiques en coordonnées cylindriques. On trouve par exemple les composantes physiques suivantes :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \tag{36}$$

– le gradient d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{37}$$

– la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$div(\overrightarrow{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{38}$$

– la divergence d'un tenseur $\underline{A}$ du second ordre symétrique :

$$\overrightarrow{div}(\overrightarrow{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} + \frac{A_{r\theta} + A_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{A_{zr}}{r} \end{cases} \tag{39}$$

– les composantes du "vecteur rotation" associé au rotationel d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\left\{\begin{array}{l} R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ R_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ R_z = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \end{array}\right. \tag{40}$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{41}$$

3.3 Coordonnées sphériques

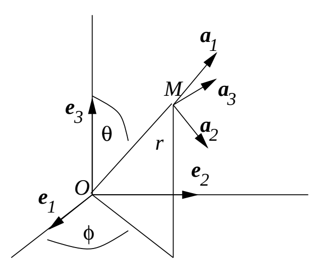

FIG. 5 – Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure 5). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère $(\overrightarrow{e}_i)$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E joignant les points O et M. Le système de coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) est généré par un repère naturel $(\overrightarrow{a}_i)$ tel que, au voisinage du point M :

$$d\overrightarrow{u} = dx^1\overrightarrow{e}_1 + dx^2\overrightarrow{e}_2 + dx^3\overrightarrow{e}_3 = dr\,\overrightarrow{a}_1 + d\theta\,\overrightarrow{a}_2 + d\phi\,\overrightarrow{a}_3 \tag{42}$$

avec des coordonnées liées entre elles sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = r\sin\theta\cos\phi \\ x^2 = r\sin\theta\sin\phi \\ x^3 = r\cos\theta \end{array}\right. \tag{43}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{a}_i$ ont donc comme composantes :

$$\overrightarrow{a}_1 = \left| \begin{array}{l} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{a}_2 = \left| \begin{array}{l} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{a}_3 = \left| \begin{array}{l} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ 0 \end{array} \right. \tag{44}$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}, \tag{45}$$

Les composantes physiques d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = ru^2 \\ u_\phi = \frac{u_3}{r\sin\theta} = r\sin\theta u^3 \end{array} \right. \tag{46}$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre $\underline{A}$ seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} & A_{r\phi} = \frac{A_{13}}{r\sin\theta} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} & A_{\theta\phi} = \frac{A_{23}}{r^2\sin\theta} \\ A_{\phi r} = \frac{A_{31}}{r\sin\theta} & A_{\phi\theta} = \frac{A_{32}}{r^2\sin\theta} & A_{\phi\phi} = \frac{A_{33}}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{47}$$

ou :

$$\left[\begin{array}{lll} A_{rr} = A^{11} & \ldots A^{12} & A_{r\phi} = r\sin\theta A^{13} \\ A_{\theta r} = rA^{2} \ldots \theta & & \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) \\ r\sin^2\theta & \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{1}{r} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Ces équations permettent de retrouver les opérateurs différentiels classiques en coordonnées sphériques. On trouve par exemple les composantes physiques des tenseurs suivants :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \end{cases} \quad (52)$$

– le gradient d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\phi \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\theta \end{bmatrix} \quad (53)$$

– la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$div(\overrightarrow{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\theta \quad (54)$$

– la divergence d'un tenseur $\underline{A}$ symétrique d'ordre 2 :

$$\overrightarrow{div}(\overrightarrow{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2A_{rr}-A_{\theta\theta}-A_{\phi\phi}}{r} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_{r\theta} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\theta}}{r} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}(A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi}) \\ \frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\phi}}{r} + 2\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_{\theta\phi} \end{cases} \quad (55)$$

– le "vecteur rotation" associé au rotationel d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{cases} R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\phi \\ R_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \\ R_\phi = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (56)$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{57}$$