CINÉMATIQUE - EXERCICES

Élongation pure

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation d'élongation pure définie de façon lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1(1 + \alpha t), x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \tag{1}$$

- Déterminer la vitesse et les trajectoires
- Donner la représentation eulérienne du mouvement
- Déterminer le tenseur $\underline{F}$, gradient de la transformation
- Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume et d'une aire

Cisaillement simple

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation de glissement simple définie de façon lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1 + 2\alpha t X_2, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \tag{2}$$

- Déterminer la vitesse et les trajectoires
- Donner la représentation eulérienne du mouvement
- Déterminer le tenseur $\underline{F}$, gradient de la transformation
- Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume et d'une aire

Trajectoire

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation définie de façon eulérienne :

$$\begin{array}{l} v_1 = \alpha x_2, v_2 = \alpha x_1, v_3 = 0 \text{ avec } \alpha > 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ à } t = 0 \end{array} \tag{3}$$

- Donner la description lagrangienne du mouvement
- Dessiner les trajectoires

Équation de transport

Montrer que la vitesse de variation de l'intégrale de volume $I(t) = \int_\Omega g(\overrightarrow{x}, t) dv$, où g est une fonction scalaire, est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dI}{dt} = \int_\Omega (\frac{\partial g}{\partial t} + div(g\overrightarrow{v}))dv$$

Pour cela, faire un changement de variable pour tout exprimer dans la configuration initiale avant de dériver, puis utiliser les symboles de permutation p_{ijk} pour exprimer la quantité J sous la forme :

$$J = det(\underline{F}) = \frac{1}{6} p_{ijk} p_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn} \text{ avec } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{4}$$