

CONTRAINTES

1 Tenseur des contraintes

1.1 Hypothèses de base

Nous considérons un solide Ω en cours de déformation, nous isolons une partie Ω_A de ce solide, et nous analysons les efforts agissant sur cette partie (figure 1). Nous sommes donc en configuration eulérienne.

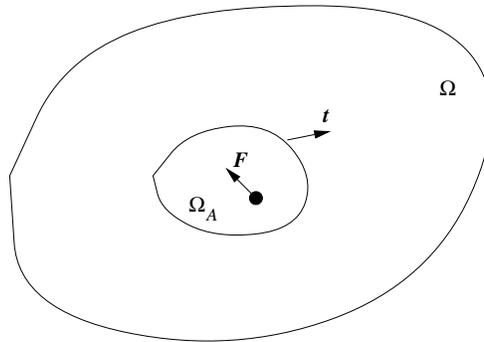


FIG. 1 – Hypothèses de base pour la définition des contraintes

Du fait de la déformation, le changement de position relative des points matériels fait qu'ils ne sont plus dans leur état d'équilibre primitif (*i.e.* avant déformation). Il en résulte l'apparition de forces qui tendent à faire revenir le corps dans son état d'équilibre. En particulier, les forces agissant sur la partie isolée Ω_A sont :

- celles présentes dans Ω_A , dues au changement de position relative des points matériels

- celles exercées sur Ω_A par le reste du volume, et qui ont provoqué le changement de position relative des points matériels (*i.e.* la déformation) de Ω_A

Les efforts présents dans Ω_A sont représentées par une densité volumique \vec{H} , illustrant les forces et les moments nécessaires pour changer localement les positions relatives des points matériels. Les efforts exercés par le reste du volume pourraient également être représentés par une densité volumique sur $\Omega - \Omega_A$. Mais l'hypothèse fondamentale de la mécanique des milieux continus est que le rayon d'action de ces efforts est suffisamment faible (de l'ordre des distances intermoléculaires) devant notre échelle d'observation (macroscopique) pour que l'on puisse se limiter à leur seule action très proche de la frontière de Ω_A . Il s'en suit que ces efforts sont représentés localement par une densité surfacique de forces \vec{t} et une densité surfacique de moments \vec{c} .

L'hypothèse fondamentale que nous venons d'énoncer conditionne l'échelle d'observation que l'on doit adopter en mécanique des milieux continus. Cette échelle est dite "macroscopique". Un volume élémentaire du solide devra donc contenir suffisamment de matière pour que cette hypothèse soit valable. Par exemple, dans le cas des matériaux cristallins, ce volume devra être largement supérieur au volume d'une maille élémentaire.

Une deuxième hypothèse en mécanique des milieux continus est que la densité surfacique de moments \vec{c} agissant sur la frontière de Ω_A est uniquement celle générée par la densité surfacique de forces \vec{t} , soit $\vec{c} = \vec{t} \wedge \vec{x}$. Ceci signifie que, localement, la structure du matériau ne transmet que des forces d'interaction (par exemple les forces de van der Waals), mais pas de couples. Cette hypothèse fournit le cadre de la mécanique des milieux continus "classiques". Toutefois, il convient de noter ici qu'il existe une théorie des milieux continus dits de "Cosserat", où cette hypothèse n'est pas réalisée. Nous nous limiterons dans ce document aux milieux "classiques".

1.2 Théorème de l'action et de la réaction

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème de l'action et de la réaction sur la partie Ω_A du solide Ω :

- les résultantes des forces agissant sur Ω_A se neutralisent :

$$\int_{\Omega_A} \vec{H} dv = \int_{\partial\Omega_A} \vec{t} ds \quad (1)$$

– les résultantes des moments agissant sur Ω_A se neutralisent :

$$\int_{\Omega_A} (\vec{H} \wedge \vec{x}) dv = \int_{\partial\Omega_A} (\vec{t} \wedge \vec{x}) ds \quad (2)$$

Pour respecter la première condition, le théorème de la divergence nous conduit à définir un tenseur $\underline{\sigma}$ tel que :

$$\vec{H} = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \text{ et } \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} \quad (3)$$

où \vec{n} est la normale unitaire sortant de la frontière de Ω_A . Le tenseur $\underline{\sigma}$ ainsi défini est appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*, tandis que le vecteur \vec{t} est le *vecteur contrainte*. Ces deux quantités sont homogènes à une densité surfacique de forces, c'est-à-dire à une pression.

Dans la seconde condition, l'application du théorème de la divergence et de la définition du vecteur contrainte et du tenseur des contraintes nous conduit à l'expression suivante du premier membre :

$$\int_{\Omega_A} (\vec{H} \wedge \vec{x}) dv = \int_{\partial\Omega_A} (\vec{t} \wedge \vec{x}) ds - \int_{\Omega_A} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^t) dv \quad (4)$$

Le respect de la seconde condition implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy ($\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^t$), qui ne possède donc que six composantes indépendantes.

1.3 Signification physique du vecteur contrainte

Isolons maintenant une partie de la frontière de Ω_A sur la figure 1. Sur chaque élément de surface $d\vec{s}$, de normale unitaire \vec{n} , au point P , un élément de force $d\vec{f}$ s'exerce (figure 2). Cet élément de force rend compte des efforts locaux permettant de respecter la continuité du matériau (forces de cohésion).

Le vecteur contrainte \vec{t} (forces de cohésion par unité de surface) au point P est alors défini par :

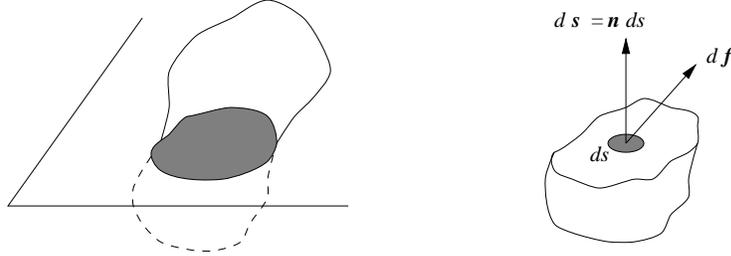


FIG. 2 – Forces de cohésion s’appliquant sur un élément de surface

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{ds} \quad (5)$$

Un vecteur contrainte n’est donc pas forcément porté par la normale \vec{n} à la surface sur laquelle il s’applique. Nous verrons plus loin que le vecteur contrainte sert aussi à schématiser les sollicitations extérieures appliquées à un solide. Par exemple, il est possible d’appliquer une pression normale ou tangentielle sur une surface. Une pression normale est décrite par un vecteur contrainte porté par la normale à la surface. Une pression tangentielle est décrite par un vecteur contrainte tangent à la surface. L’unité des composantes du vecteur contrainte est donc la même que celle d’une pression (force par unité de surface).

1.4 Les autres tenseurs de contraintes

Nous avons vu que le tenseur des contraintes de Cauchy est l’application linéaire qui relie le vecteur contrainte $\vec{t}(P, \vec{n})$ à la normale unitaire \vec{n} de l’élément de surface $d\vec{s}$ situé au point P , soit :

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = \underline{\sigma}(P) \cdot \vec{n} \quad (6)$$

Ce tenseur est fonction du point P en lequel on se place, mais pas de la facette élémentaire considérée en ce point (normale \vec{n}). Il est important de ne pas confondre le vecteur contrainte \vec{t} et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, bien que leurs composantes aient la même unité (homogène à une pression).

En notant $d\vec{s} = \vec{n} ds$, les équations 5 et 6 donnent pour le tenseur des contraintes de Cauchy (nous ne mentionnons pas ici le passage à la limite

pour simplifier les notations) :

$$d\vec{f} = \underline{\sigma}.d\vec{s} \quad (7)$$

Dans la suite de ce document, nous utiliserons le tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique, pour lequel toutes les grandeurs sont exprimées dans la configuration courante $C(t)$. Il est toutefois important de connaître d'autres tenseurs des contraintes, qui sont parfois utilisés en mécanique. D'après les relations de transport des vecteurs et des surfaces élémentaires, on voit en effet que le choix de la configuration du solide dans laquelle seront représentés l'élément de force $d\vec{f}$ d'une part, et l'élément de surface $d\vec{s}$ de normale \vec{n} d'autre part, influera sur le type de contrainte utilisée.

1.4.1 Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

En transportant $d\vec{f}$ et $d\vec{s}$ dans C_0 (avec les notations $d\vec{f}_0$ et $d\vec{S}$), et en utilisant les équations de transport d'un vecteur (pour le transport de $d\vec{f}$) et d'une surface (pour le transport de $d\vec{s}$), nous obtenons un tenseur des contraintes $\underline{\Pi}$ défini dans C_0 . Ce tenseur des contraintes est appelé tenseur de Piola-Kirchhoff. Il est lagrangien et symétrique :

$$d\vec{f}_0 = \underline{\Pi}.d\vec{S} \text{ avec } \underline{\Pi} = J\underline{F}^{-1}.\underline{\sigma}.\underline{(F}^{-1})^t \quad (8)$$

1.4.2 Tenseur des contraintes de Piola-Lagrange

En ne transportant maintenant que l'élément de surface (et non l'élément de force), on obtient un nouveau tenseur de contraintes \underline{B} appelé tenseur de Piola-Lagrange (ou de Boussinesq), dans lequel les éléments de force sont représentés dans $C(t)$ et les éléments de surface dans C_0 :

$$d\vec{f} = \underline{B}.d\vec{S} \text{ avec } \underline{B} = J\underline{\sigma}.\underline{(F}^{-1})^t \quad (9)$$

Ce tenseur n'est ni lagrangien, ni eulérien. Il n'est pas forcément symétrique.

2 Signification physique des contraintes

2.1 Contraintes normale et tangentielle

Le tenseur des contraintes permet de définir une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette (figure 3).

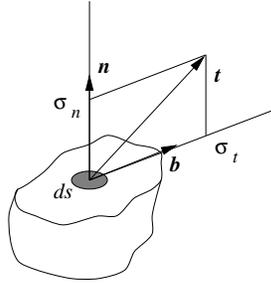


FIG. 3 – Contraintes normale et tangentielle

La contrainte normale σ_n est la projection du vecteur contrainte sur la normale à cette facette. Elle s'exprime sous la forme :

$$\sigma_n(M, \vec{n}) = \vec{t}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (10)$$

La contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette est la projection du vecteur contrainte sur cette facette, c'est-à-dire sur le plan de normale \vec{n} . Elle peut également être définie comme le complément de la contrainte normale (portée par \vec{n}) dans le vecteur contrainte. En notant \vec{b} le vecteur unitaire du plan de normale \vec{n} portant la contrainte tangentielle, on peut écrire :

$$\sigma_t \vec{b} = \vec{t} - \sigma_n \vec{n} \text{ ou } \sigma_t = \vec{t} \cdot \vec{b} \quad (11)$$

Les contraintes normale et tangentielle sont d'une grande importance en mécanique des milieux continus. Elles permettent en particulier de définir les conditions aux limites en pression (contrainte normale sur une face), les conditions d'interface (lois de frottement reliant les contraintes normale et tangentielle), ...

2.2 Conditions aux limites en pression

D'une façon générale, des conditions de pression peuvent être appliquées à la frontière d'un solide (zone de chargement, face libre, ...). Ces conditions sont alors dites "aux limites". Elles se traduisent par des relations du type :

$$\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T} \quad (12)$$

où \vec{T} est un vecteur contrainte représentant les pressions imposées sur la surface de normale unitaire \vec{n} . Comme dans le cas des déplacements, il se peut que l'on ne connaisse que certaines composantes du vecteur \vec{T} . La condition porte alors sur ces composantes connues, et pas sur les autres. Dans ce document, pour simplifier, nous utiliserons la notation vectorielle qui suppose que le vecteur \vec{T} est entièrement connu.

2.3 Contraintes dans un repère orthonormé

Considérons maintenant un cube dont les arêtes sont portées par les vecteurs de référence d'un système de coordonnées orthonormé (figure 4). Il est alors possible de donner une signification plus "physique" aux différentes composantes du tenseur des contraintes.

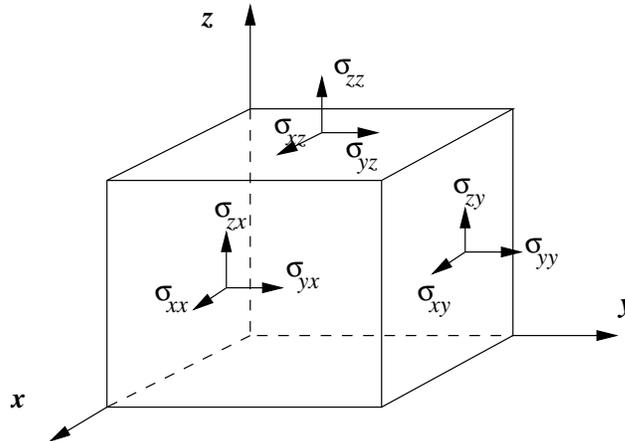


FIG. 4 – Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube

En effet, σ_{xx} représente la contrainte normale appliquée au solide dans la direction \vec{x} , tandis que σ_{xy} et σ_{xz} sont les composantes de la contrainte

tangentielle agissant sur cette même facette. D'une façon plus générale, on voit donc que les composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont des contraintes normales tandis que les autres sont des contraintes tangentielles, lorsque l'on raisonne par rapport aux facettes orthogonales aux vecteurs de référence. Par contre, si on considère une facette quelconque de normale unitaire \vec{n} quelconque (l'extrémité de \vec{n} peut être située partout sur la sphère unité), alors les contraintes normale et tangentielle sont obtenues par les équations 10 et 11. Il sera donc toujours important de savoir par rapport à quel repère on écrit les composantes du tenseur des contraintes.

3 Équations d'équilibre

3.1 Description globale

Nous considérons un solide de volume Ω , en équilibre sous l'action de pressions extérieures \vec{T} appliquées sur une partie $\partial\Omega_T$ de la surface extérieure $\partial\Omega$ et de déplacements \vec{U}_d imposés sur $\partial\Omega_U$ (figure 5). Isolons une partie Ω_A du domaine Ω , soumise à des forces volumiques \vec{f}_v , à des forces d'inertie $\rho\gamma$, mais à aucune distribution de couple. Les forces exercées par le solide environnant $\Omega - \Omega_A$ sont représentées par le vecteur contrainte $\vec{t}(M, \vec{n})$, où \vec{n} est la normale extérieure à la surface frontière $\partial\Omega_A$ de Ω_A au point M .

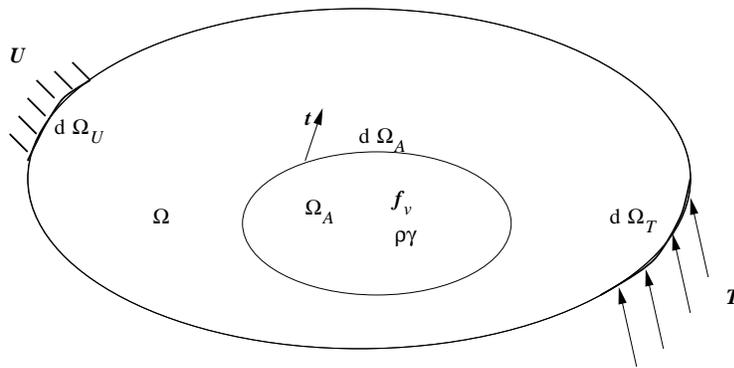


FIG. 5 – Description de l'équilibre d'une structure

3.2 Équilibre des forces

L'équilibre des forces extérieures ($\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma}$) du domaine Ω_A s'écrit en égalant la somme des forces extérieures agissant sur Ω_A (la densité volumique \vec{f}_v et la densité surfacique \vec{t}) à la variation de quantité de mouvement de cette partie du solide :

$$\int_{\Omega_A} \vec{f}_v(M) dv + \int_{\partial\Omega_A} \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_A} \rho \vec{v} dv \right) = \int_{\Omega_A} \rho \vec{\gamma} dv \quad (13)$$

La transformation de Green-Ostrogradsky, ou théorème de la divergence, appliquée au vecteur contrainte dans l'équation précédente donne :

$$\int_{\partial\Omega_A} \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \int_{\partial\Omega_A} \underline{\sigma}(M) \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega_A} \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}(M)) dv \quad (14)$$

En reportant cette équation dans l'équation globale précédente, on obtient l'intégrale volumique suivante, qui doit être nulle dans tout domaine Ω_A :

$$\int_{\Omega_A} (\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) dv = 0 \quad (15)$$

Il s'en suit que la quantité intégrée doit être nulle dans le domaine Ω , ce qui fournit l'équation locale de la dynamique :

$$\forall M \in \Omega, \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (16)$$

3.3 Équilibre des moments

L'équilibre des moments autour des axes passant par un point M_0 du domaine Ω_A de la figure 5 ($\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext} // M_0) = 0$) s'écrit :

$$\int_{\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \vec{f}_v(M) dv + \int_{\partial\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \int_{\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \rho \vec{\gamma} dv \quad (17)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur l'intégrale de surface de cette équation, on obtient à nouveau une intégrale volumique globale sur le domaine Ω_A , qui doit s'annuler pour tout domaine Ω_A :

$$\int_{\Omega_A} \left[\vec{M}_0 \vec{M} \wedge (\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) + \begin{Bmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{Bmatrix} \right] dv = \vec{0} \quad (18)$$

La quantité intégrée doit donc être nulle dans le domaine Ω . En tenant compte de l'équation locale de la dynamique, cette condition d'équilibre des moments conduit à nouveau à la symétrie du tenseur des contraintes, qui ne possède donc que six composantes indépendantes (comme le tenseur des déformations).

4 Utilisation du tenseur des contraintes

4.1 Contraintes principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Il est donc diagonalisable dans un repère orthonormé. Dans ce repère, dit principal, les trois valeurs propres du tenseur des contraintes sont souvent notées σ_I , σ_{II} et σ_{III} . Ce sont les contraintes principales du tenseur $\underline{\sigma}$. Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Il est constitué de trois contraintes normales appliquées sur les facettes orthogonales aux directions du repère principal.

4.2 Contrainte moyenne et déviateur

Il est courant de décomposer le tenseur des contraintes de Cauchy en une partie dite sphérique et une partie dite déviatorique sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \underline{S} + \sigma_m \underline{I} \text{ avec } \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad (20)$$

où \underline{I} est le tenseur identité. σ_m est appelée contrainte moyenne et \underline{S} le tenseur déviateur des contraintes. On peut remarquer que le tenseur déviateur des contraintes \underline{S} est symétrique et de trace nulle.

4.3 Contraintes équivalentes

Il est très intéressant, en résistance des matériaux, de comparer les contraintes obtenues sur une structure (après mesures ou par le calcul) aux caractéristiques du ou des matériaux qui la constituent. Pour cela, il est commode d'utiliser des scalaires représentatifs du tenseur des contraintes, qui sont indépendants du repère dans lequel on travaille. Comme tout tenseur euclidien de dimension 2 dans un espace de dimension 3, le tenseur déviateur des contraintes de Cauchy possède trois invariants souvent notés J_1 , J_2 et J_3 qui sont :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\underline{S}) = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{S} \cdot \underline{S}) \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S} \cdot \underline{S} \cdot \underline{S}) \end{cases} \quad (21)$$

Dans le cas du tenseur des contraintes (et non du déviateur), ces invariants sont notés I_1 , I_2 et I_3 :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) \end{cases} \quad (22)$$

Un scalaire représentatif du tenseur des contraintes, et indépendant du repère, est appelé contrainte équivalente. Il est souvent noté $\bar{\sigma}$. Il sert à comparer les contraintes dans la structure étudiée aux caractéristiques du matériau (par exemple sa limite d'élasticité). Les deux contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de von Mises et de Tresca.

4.3.1 La contrainte équivalente de von Mises

La contrainte équivalente de von Mises est fonction uniquement du second invariant du déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (23)$$

Dans un repère orthonormé, elle s'écrit directement en fonction des composantes du déviateur ou du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} S_{ij} S_{ji}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \frac{1}{2} \left(\sum_k \sigma_{kk} \right)^2} \quad (24)$$

4.3.2 La contrainte équivalente de Tresca

La contrainte équivalente de Tresca est définie en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (25)$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir s'écrire simplement en fonction des composantes du tenseur des contraintes. Pour l'obtenir, il faut diagonaliser ce tenseur. Dans un programme numérique, son estimation est donc plus coûteuse que celle de la contrainte équivalente de von Mises.