DÉFORMATIONS - EXERCICES

Glissement simple

On considère une transformation de glissement simple donnée dans un repère orthonormé par sa description lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1 + 2\alpha t X_2, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \tag{1}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, c'est à dire pour $\alpha t \ll 1$:

- Calculer le tenseur gradient des déplacements, celui des déformations, et celui des rotations de corps solide
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus
- Que se passe-t-il lorsque αt n'est plus petit devant 1 ?

Dans le cas général, c'est-à-dire pour αt quelconque :

- Calculer le tenseur des dilatations
- Calculer les tenseurs des déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi
- Calculer les allongements unitaires et les directions principales de déformation
- Étudier l'évolution de ces directions principales au cours de la transformation

Cisaillement pur

On considère la transformation d'un solide donnée par le champ de déplacements suivant $\overrightarrow{u} = (u1, u_2, u_3)$ dans un repère cartésien (O, X_1, X_2, X_3) :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_1 = kX_2 \\
u_2 = kX_1 \\
u_3 = 0
\end{array}
\right.
\tag{2}
$$

où k est une constante positive.

- Calculer le tenseur $\underline{F}$, gradient de la transformation, ainsi que son déterminant J.
- Calculer les tenseurs de déformation de Green-Lagrange $\underline{E}$ et d'Euler-Almansi $\underline{e}$.
- Traduire l'hypothèse des petites perturbations par une condition sur la constante k. Montrer que dans cette hypothèse les tenseurs de déformation $\underline{E}$ et $\underline{e}$ coïncident. Exprimer ce tenseur unique en le notant $\underline{\epsilon}$, et en déduire les directions principales de déformation.
- Dessiner l'évolution d'un cube de côté unité selon cette transformation. En déduire de deux façons (géométriquement et par le calcul) la variation de volume.

Compatibilité des déformations

Dans l'hypothèse des petites perturbations, une transformation est donnée par le tenseur gradient des déplacements suivant :

$$
\underline{d} = \begin{bmatrix} \alpha X^2 & \beta X_1 X_2 & \beta X_1 X_3 \\ \beta X_2 X_1 & \alpha X^2 & \beta X_2 X_3 \\ \beta X_3 X_1 & \beta X_3 X_2 & \alpha X^2 \end{bmatrix} \text{ avec } X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \tag{3}
$$

- Donner la condition pour que ce tenseur dérive d'un champ de déplacements
- En déduire une description lagrangienne de cette transformation

Mesure de déformations

A l'aide de trois jauges placées à 0, 45, et 90 degrés de la direction X_1, les variations relatives de longueur suivantes ont été mesurées successivement à la surface d'une pièce : 0,1, 0,05 et 0,2. En déduire les composantes du tenseur des déformations dans le plan de mesure.