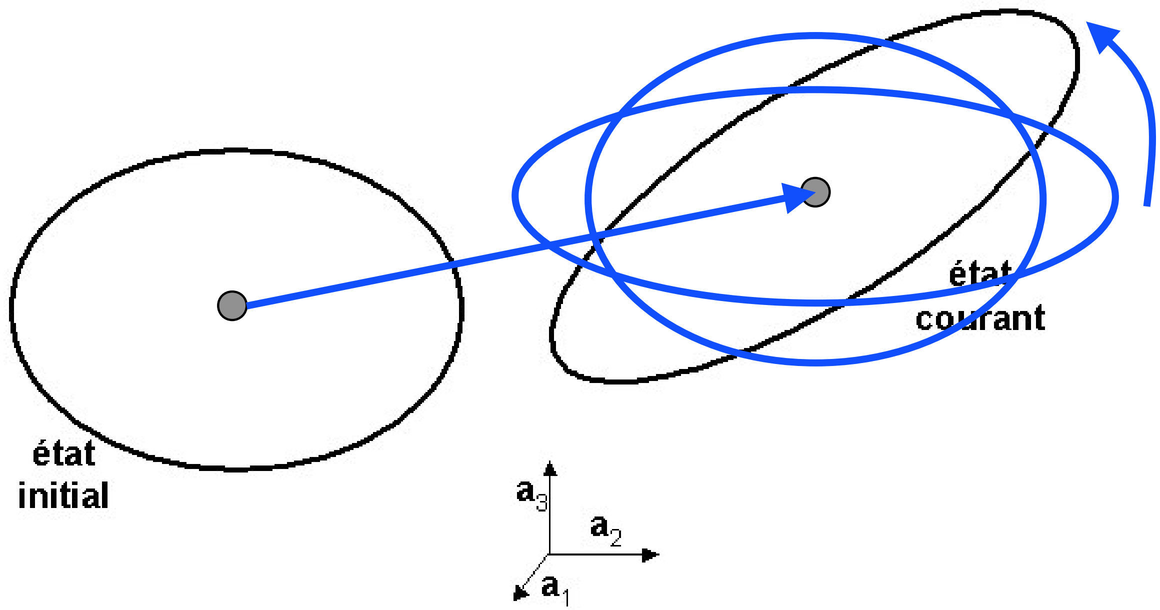
DEFORMATIONS

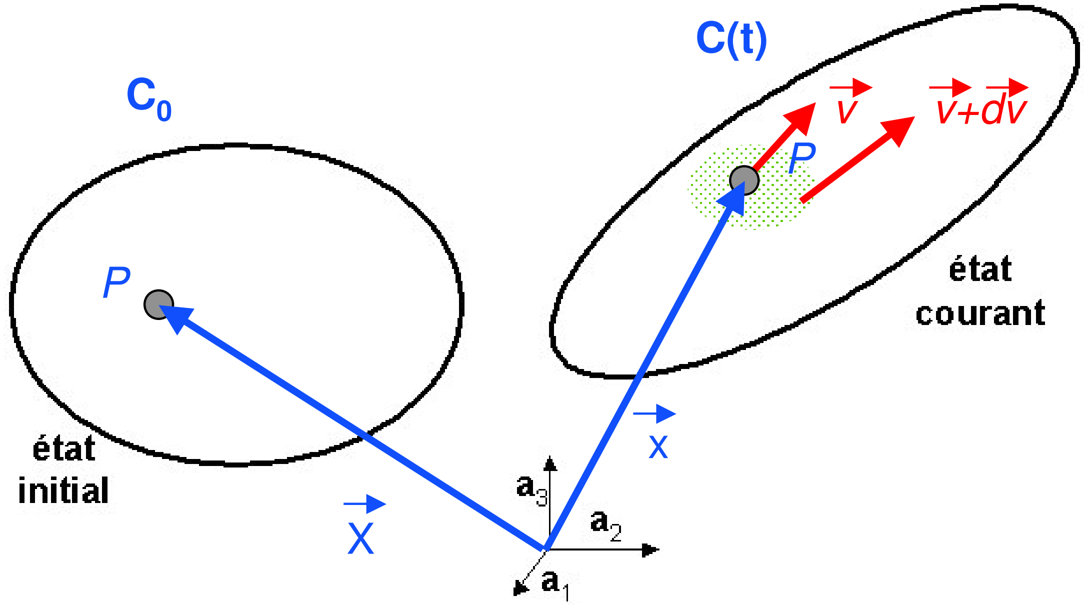
DEFORMATIONS

Comment décrire la transformation de ce solide ?



Il faut utiliser :
- un déplacement de corps solide
- une déformation
- une rotation

DEFORMATIONS



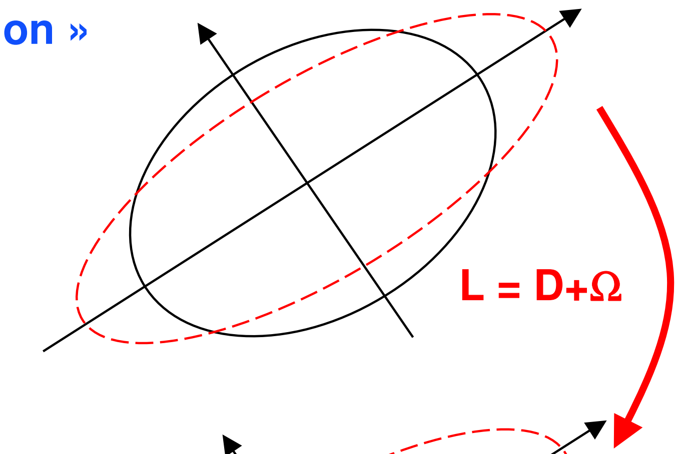
vitesse d'un point : $\vec{v}(\vec{x}, t)$

vitesse autour du point P : $\vec{dv} = grad_X(v).\vec{dX} = grad_X(v).F^{-1}.\vec{dx} = \dot{F}.F^{-1}.\vec{dx}$

Tenseur gradient des vitesses de déplacement : $L = \dot{F}.F^{-1}$

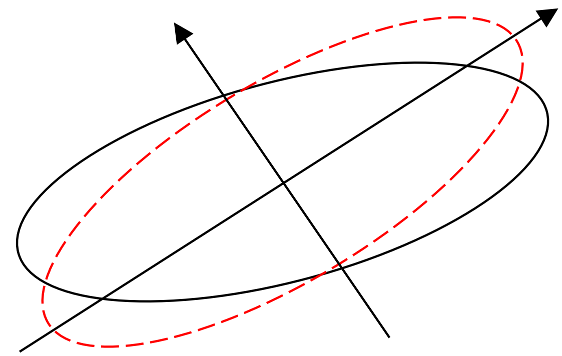
Tenseur « taux de déformation »

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{L}+\mathbf{L}^t)$$

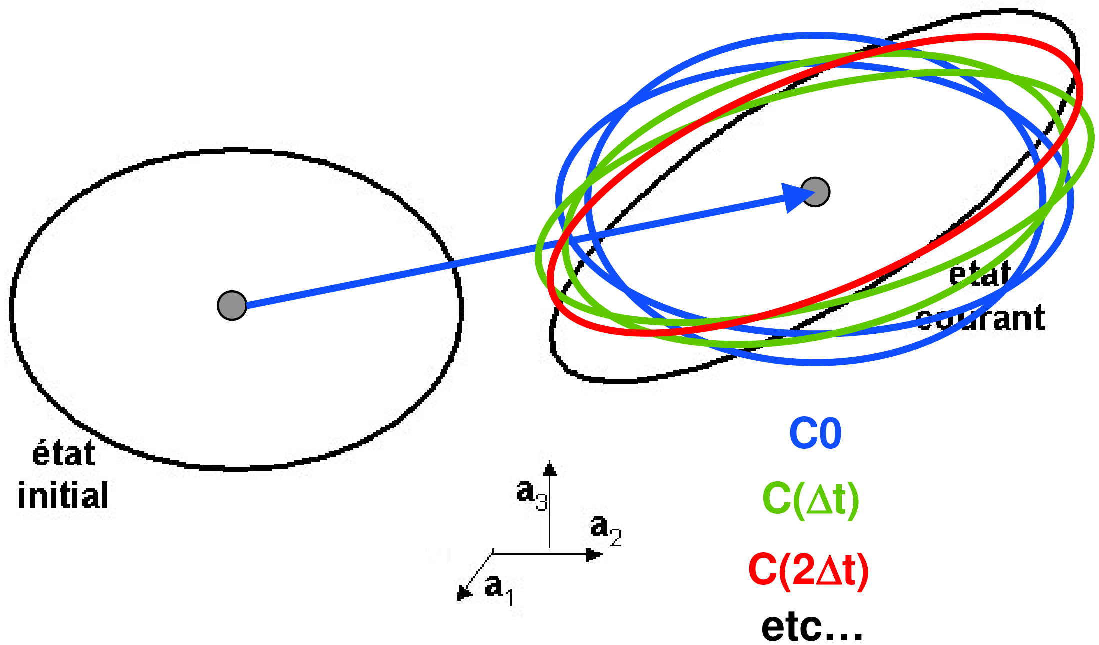


Tenseur « taux de rotation »

$$\boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{L}-\mathbf{L}^t)$$



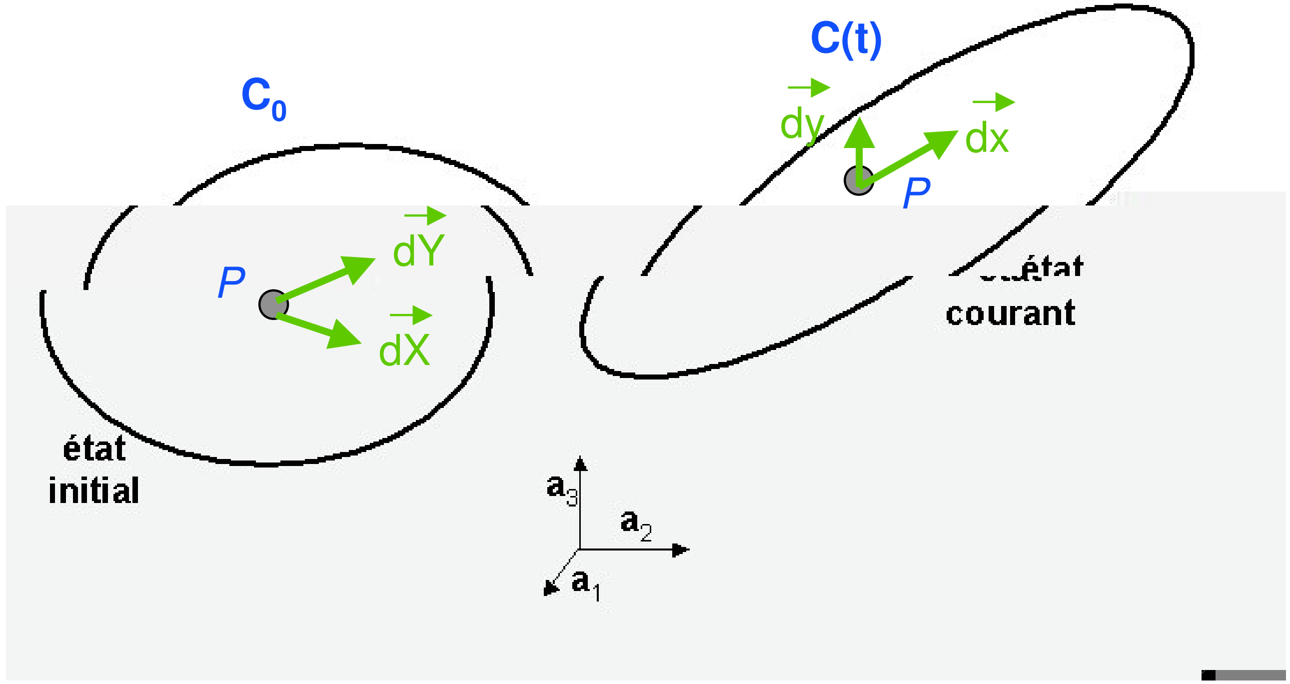
Comment intégrer dans le temps les tenseurs taux de déformation et de rotation ?



La configuration est actualisée à la fin de chaque incrément de temps

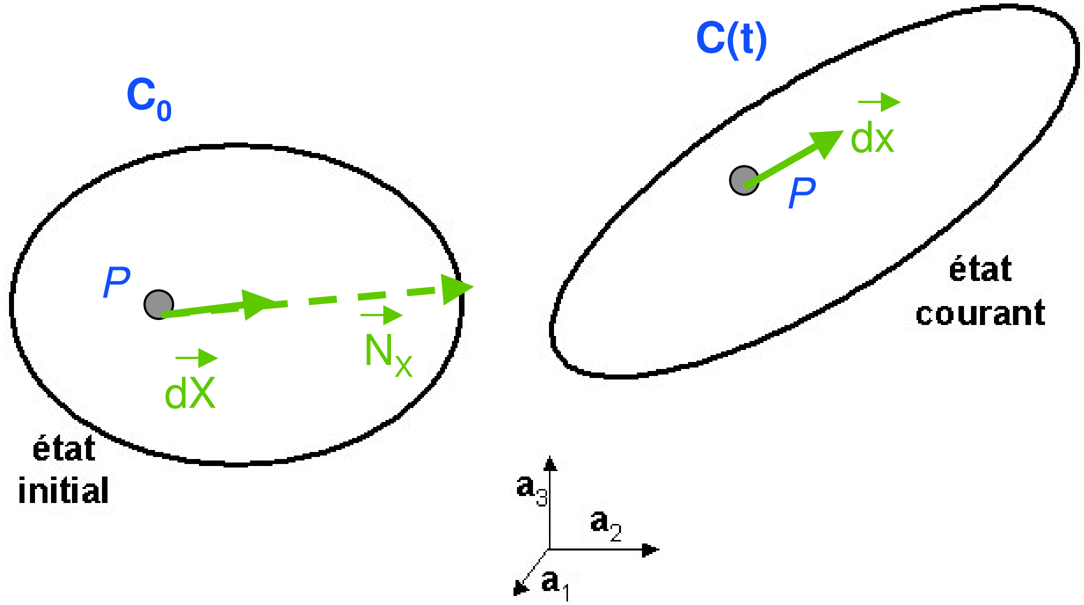
Configuration « lagrangienne réactualisée »

DEFORMATIONS



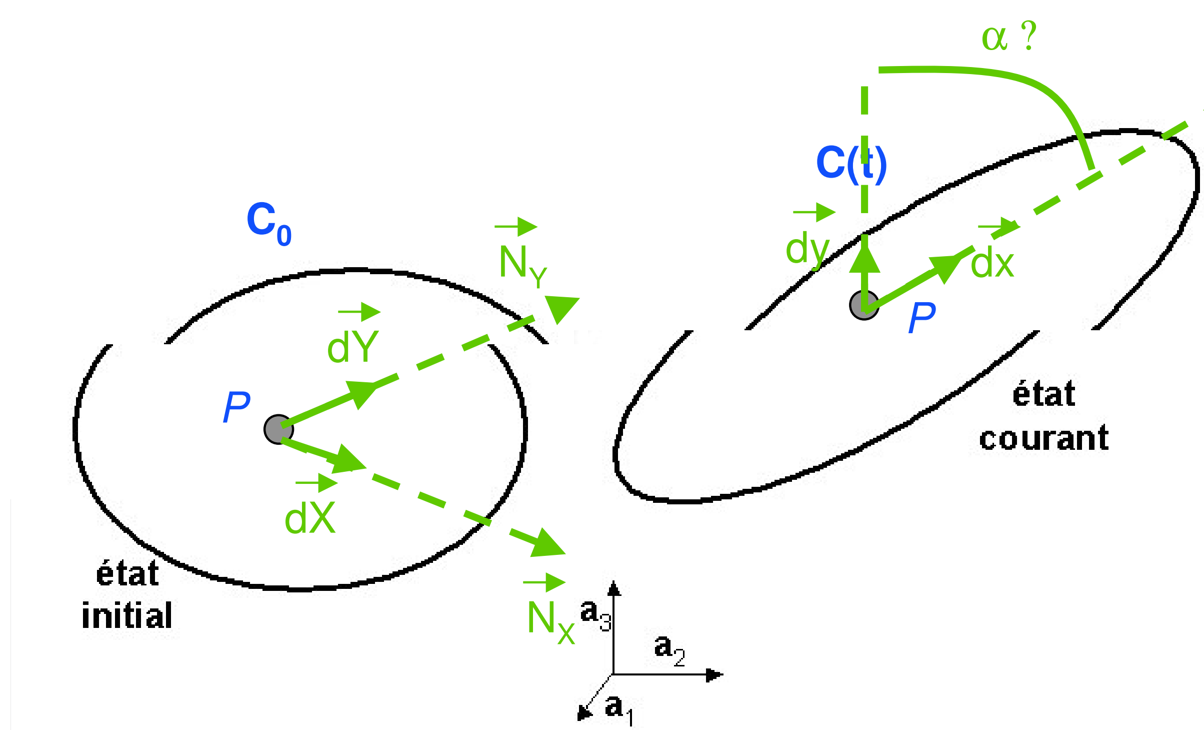
$$\vec{dx} \cdot \vec{dy} = \vec{dX} \cdot F^t.F \cdot \vec{dY}$$

C : tenseur des dilatations



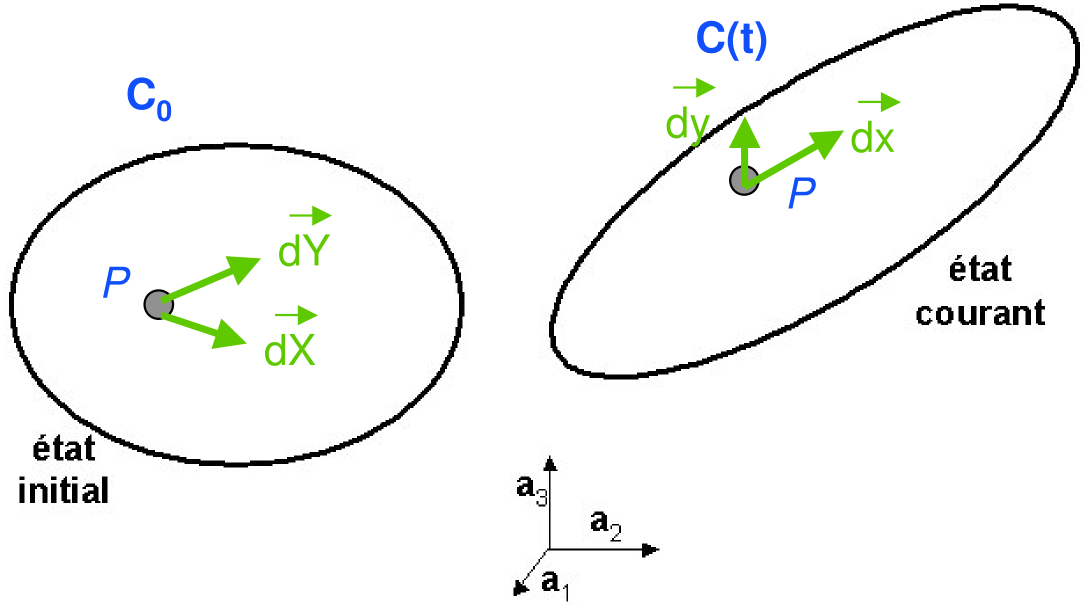
Dilatation λ (ou changement de longueur) dans la direction $\vec{N_X}$:

$$\lambda(\vec{N_X}) = \|\vec{dx}\| \,/\, \|\vec{dX}\| = \sqrt{\vec{N_X}.C.\vec{N_X}}$$



Glissement (ou changement d'angle α) entre les directions $\vec{N_X}$ et $\vec{N_Y}$:

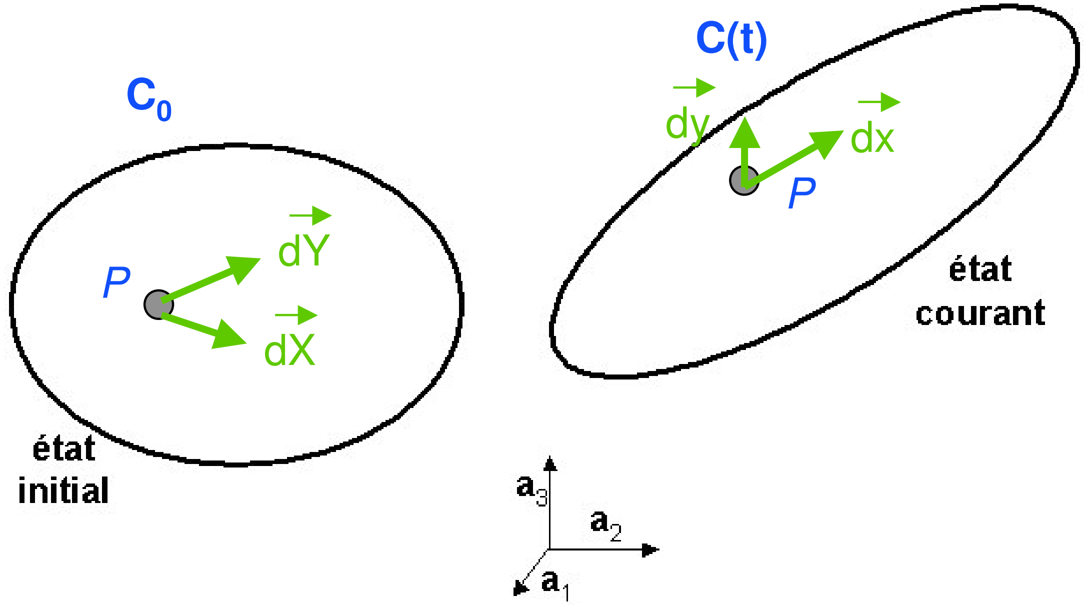
$$\cos(\alpha(\vec{N_X}, \vec{N_y})) = \vec{dx} \cdot \vec{dy} \,/\, \|\vec{dx}\|\,\|\vec{dy}\| = \vec{N_X}.C.\vec{N_Y} \,/\, \lambda(\vec{N_X})\,\lambda(\vec{N_Y})$$



$$\vec{dx} \cdot \vec{dy} = \vec{dX} \cdot C \cdot \vec{dY} = \vec{dX} \cdot \vec{dY} + 2\vec{dX} \cdot E \cdot \vec{dY}$$

tenseur de Green-Lagrange : $E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^t F - I)$

DEFORMATIONS



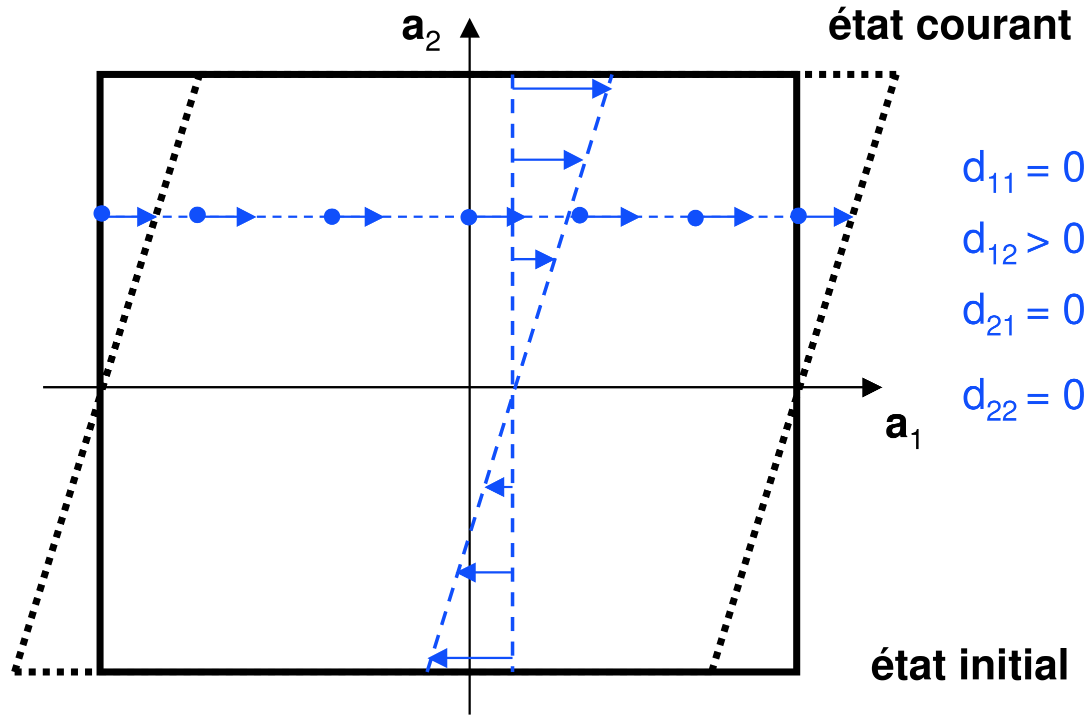
$$\vec{dx} \cdot \vec{dy} = \vec{dX} \cdot C \cdot \vec{dY} = \vec{dX} \cdot \vec{dY} + 2\vec{dx} \cdot e \cdot \vec{dy}$$

tenseur d'Euler-Almansi : $e = ½ (I - C^{-1}) = ½ (I - F^{-t}F^{-1})$

$F = I + \mathrm{grad}(\vec{u})$

faibles changements de forme : $F^{-1} \approx I - \mathrm{grad}(\vec{u})$

identification de C_0 et $C(t)$: $\dot{F} \approx \mathrm{grad}_X(\vec{v})$



$d_{11} = 0$

$d_{12} > 0$

$d_{21} = 0$

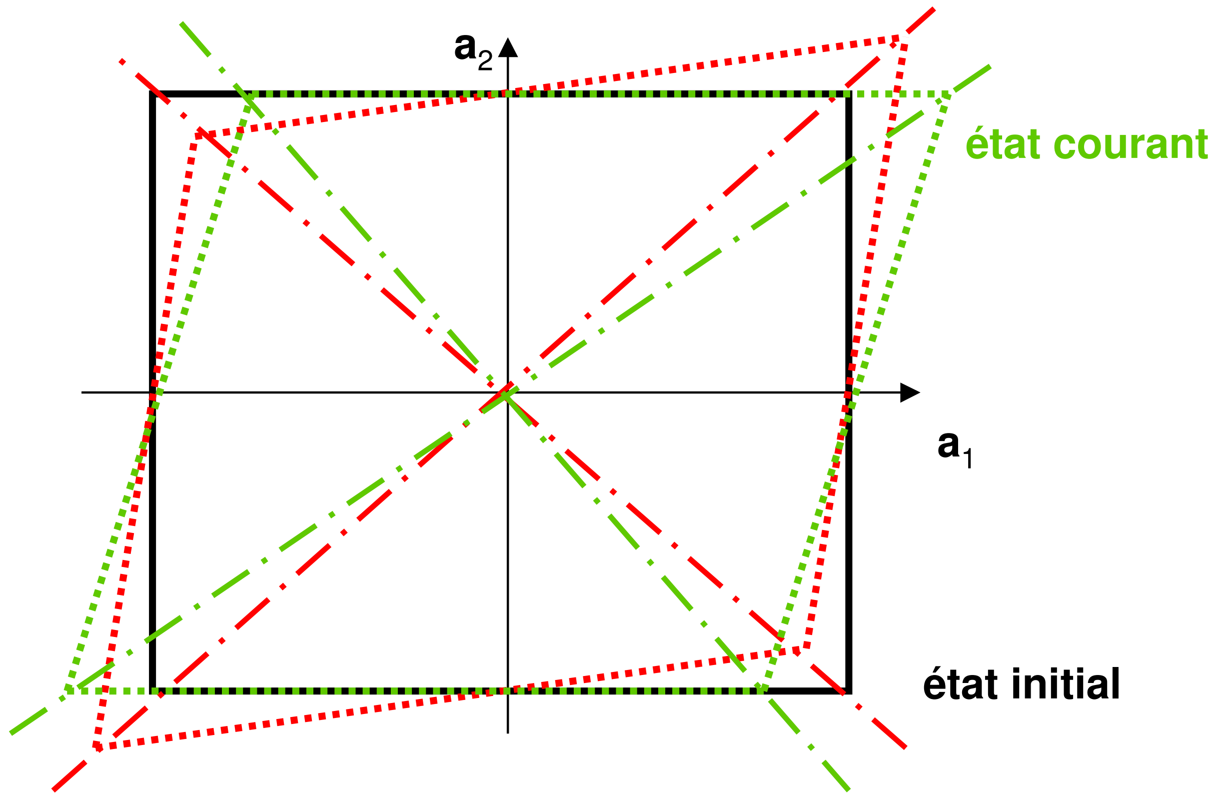
$d_{22} = 0$

$\Rightarrow$ $L = \mathrm{grad}_X(\vec{v})$ $\Rightarrow$ $d = \mathrm{grad}_X(\vec{u})$ ou $d_{ij} = u_{i,j}$

évolution de la composante u_i du déplacement le long de la direction x_j de l'espace

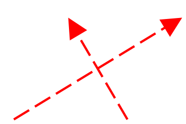
$d = \varepsilon + \omega$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2}(d + d^t)$: tenseur des déformations

$\omega = \frac{1}{2}(d - d^t)$: tenseur des rotations



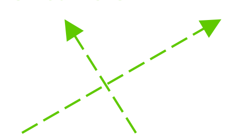
Tenseur des déformations

- symétrique
- diagonal dans le repère

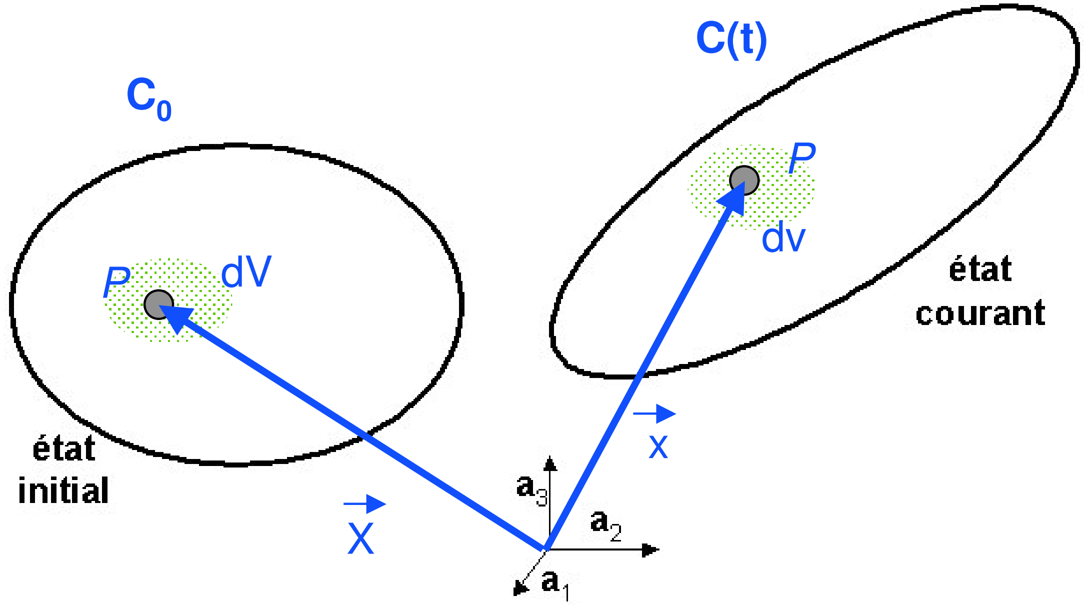


Tenseur des rotations

- antisymétrique
- « rotation » des axes



$$d = grad(\vec{u}) \Rightarrow F = I + d$$



$$dv = det(F)dV = \det(I+d)dV \approx (1+tr(\varepsilon))dV$$

En tout point du solide, la variation de volume est donnée par la trace du tenseur des déformation

Une transformation est caractérisée par
un tenseur gradient des déplacements $d = \varepsilon + \omega$

ε (symétrique) donné est-il toujours le tenseur
de déformation d'une ou de plusieurs transformations ?

$\Downarrow$

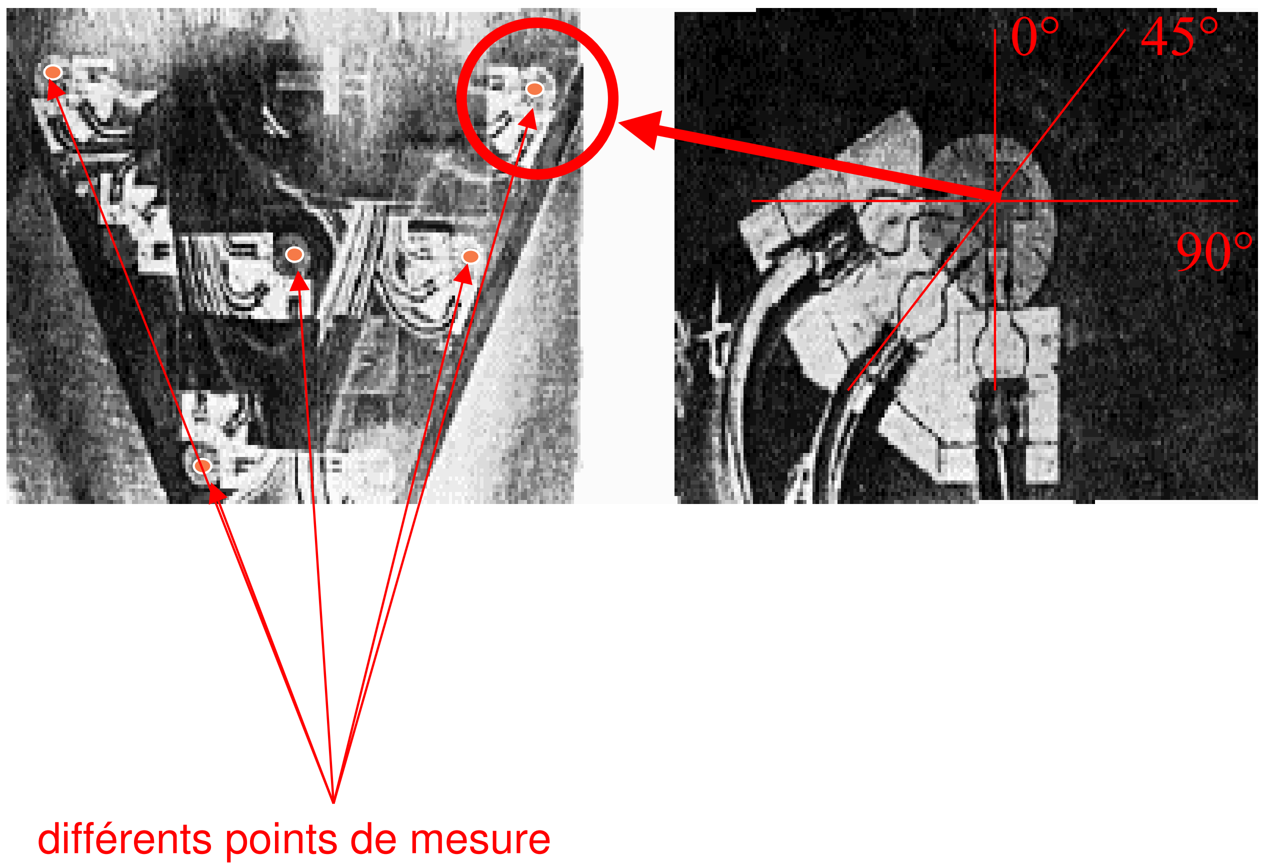
$$d = \varepsilon + \omega$$

doit être tel que : $d.\vec{dX} = \vec{du}$
où $\vec{du}$ est une différentielle totale

$\Downarrow$

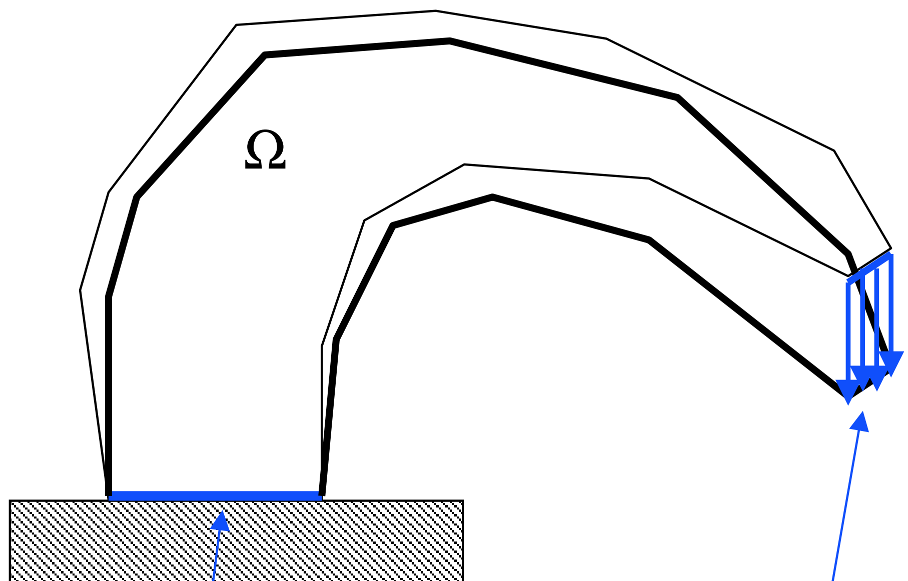
$$\varepsilon_{ki,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = \varepsilon_{kj,il} + \varepsilon_{il,kj}$$

6 équations de compatibilité



0°
45°
90°
différents points de mesure

DEFORMATIONS



tous les déplacements sont imposés nuls sur cette ligne

le vecteur déplacement est imposé ici (chargement de la structure)

$\partial\Omega_u$

DEFORMATIONS

Déformations

Hypothèse des petites perturbations

vecteur déplacement : $\vec{u}(\vec{X},t)$

tenseur des déformations :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\underline{grad}(\vec{u}) + \underline{grad}(\vec{u})^t\right)$$

équations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ki,jl} + \varepsilon_{lj,ik} = \varepsilon_{kj,il} + \varepsilon_{li;jk}$$

conditions aux limites :

$$\vec{u} = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_u$$