MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES - EXERCICES

Allongement élastique d'une barre

On considère une barre élastique de section homogène S, de longueur L, et dont le matériau possède un module d'Young E. Cette barre est soumise à une traction par déplacement d'une de ses extrémités d'une quantité U, l'autre restant fixe. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera reliée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$ (voir figure 1).

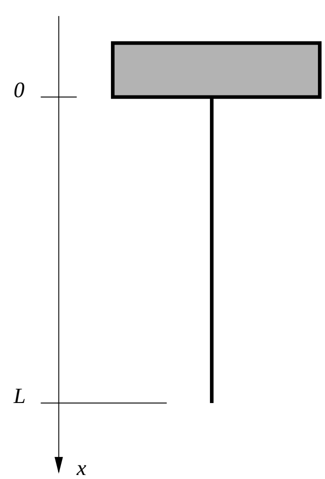


FIG. 1 – Schématisation d'une barre élastique

- Montrer qu'un champ de déplacement de la forme $u(x) = U(\frac{x}{L})^n$ avec $n \geq 1$ est cinématiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p, paramétrée par n. Calculer la forme du champ de déplacement qui minimise cette énergie.

- Montrer qu'un champ de contrainte de la forme $\sigma = \sigma_0$, où σ_0 est une constante, est statiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie complémentaire de la barre Π_c, paramétrée par σ_0. Calculer la valeur de σ_0 qui rend maximale cette énergie.
- Montrer que l'on a toujours $\Pi_p(n) \geq \Pi_c(\sigma_0)$, et que ces deux énergie coïncident lorsqu'elles sont rendues extrémale. En déduire la rigidité réelle de la barre K.

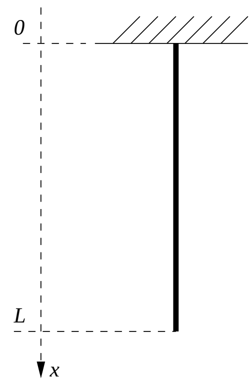
Traction élastique d'une barre

On considère une barre élastique de section homogène S, de longueur L, et dont le matériau possède un module d'Young E. Cette barre est soumise à une traction par application d'une force F à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité restant fixe. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera reliée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$ (voir figure 1).

- Montrer qu'un champ de déplacement de la forme $u(x) = U(\frac{x}{L})^n$ avec $n \geq 1$ est cinématiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p, paramétrée par U et n.
- Calculer la forme du champ de déplacement qui minimise l'énergie potentielle de la barre.

Barre sous son propre poids

Une barre de section homogène S, de longueur L, et de module d'Young E, est soumise à son propre poids (masse volumique ρ, accélération de la pesanteur g). Elle est fixée à son extrémité supérieure. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera reliée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$. On postule un champ de déplacements dans la barre sous la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes, et un champ de contraintes $\sigma(x) = Ax + B$, où A et B sont des constantes. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, et on néglige les effets d'inertie.



– Déterminer la constante c pour que le champ $u(x)$ soit cinématiquement admissible. Calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p, paramétrée par a et b. Déterminer les valeurs de a et b qui minimisent cette énergie.
– Déterminer les constantes A et B pour que le champ $\sigma(x)$ soit statiquement admissible. En déduire l'énergie complémentaire de la barre Π_c.
– Montrer à l'aide de critères énergétiques que les champs obtenus $u(x)$ et $\sigma(x)$ sont exacts.