

MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES

1 Cadre général

1.1 Principe des puissances virtuelles

Pour schématiser les efforts mis en jeu dans les phénomènes que l'on souhaite étudier, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs ou virtuels. Ces mouvements engendrent des puissances qui sont à leur tour des puissances virtuelles. Un mouvement virtuel dans un milieu matériel Ω est défini par un champ de vecteurs représentant la vitesse virtuelle instantanée \vec{v}^* de tous ses points M . Par exemple, pour évaluer la rigidité d'un ressort, on peut déplacer son extrémité à une certaine vitesse. Ce mouvement est virtuel, puisqu'il ne sert qu'à estimer cette rigidité. La puissance virtuelle P^* , associée à un mouvement virtuel donné, est le produit scalaire de la force \vec{F} nécessaire à ce mouvement par cette vitesse : $P^* = \vec{F} \cdot \vec{v}^*$.

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu des actions intérieures qui représentent les liaisons entre toutes les parties du milieu. Les deux énoncés fondamentaux du principe des puissances virtuelles sont les axiomes d'objectivité et d'équilibre :

- L'axiome d'objectivité stipule que la puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement de corps rigide est nulle.
- L'axiome d'équilibre impose que, pour tout milieu matériel isolé, de domaine Ω , repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération P_a^* est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs P_e^* et des efforts intérieurs P_i^* .

Compte-tenu de l'axiome d'objectivité, et pour un système ne présentant pas

de discontinuité de vitesse ou de contrainte (*i.e.* pas de propagation d'onde), la puissance virtuelle des efforts intérieurs est celle de l'ensemble des efforts internes $\vec{H} = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma})$ (voir le chapitre sur les contraintes pour la définition des forces internes \vec{H}), puissance à laquelle on soustrait la contribution surfacique des contraintes. L'expression de cette puissance interne est donc :

$$P_i^* = \int_{\Omega} \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}^* ds \quad (1)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à Ω .

En appliquant la relation $div(\underline{\sigma} \cdot \vec{v}) = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \cdot \vec{v} + \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v})$ au champ de vitesses virtuel \vec{v}^* , et en utilisant le théorème de la divergence et la symétrie du tenseur des contraintes, on peut encore écrire cette puissance sous la forme :

$$P_i^* = - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v}^*) dv \quad (2)$$

Les efforts extérieurs comprennent d'une part les efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs, représentés par une densité volumique de forces \vec{f}_v dans le domaine Ω , et d'autre part les efforts de contact exercés par des systèmes extérieurs, représentés par une densité surfacique de forces \vec{t} sur la surface extérieure $\partial\Omega$ de Ω . On définit alors la puissance des forces extérieures sous la forme :

$$P_e^* = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v}^* dv + \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v}^* ds \quad (3)$$

Si $\vec{\gamma}$ est le vecteur des accélérations, réelles, en chaque point M , et ρ la masse volumique en ce point, alors la puissance virtuelle des quantités d'accélération est définie par :

$$P_a^* = \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* dv \quad (4)$$

Les équations précédentes permettent d'écrire le principe des puissances virtuelles sous l'une des deux formes suivantes :

$$\forall \vec{v}^*, \int_{\Omega} (\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{v}^* dv + \int_{\partial\Omega} (\vec{t} - \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}^* ds = 0 \quad (5)$$

$$\forall \vec{v}^*, \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v}^*) dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v}^* ds = 0 \quad (6)$$

Sur la première expression, on constate que le principe des puissances virtuelles conduit d'une part à vérifier l'équilibre local de la dynamique (intégrale volumique) et d'autre part à définir le tenseur des contraintes de Cauchy par son lien avec le vecteur contrainte \vec{t} appliqué en surface (intégrale surfacique). Toutefois, les approches énergétiques sont plutôt basées sur la seconde expression. Nous allons les étudier dans le cas statique (pas de termes d'accélération).

1.2 Principe des travaux virtuels

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le principe des puissances virtuelles devient le principe des travaux virtuels. Si \vec{u}^* représente un champ de déplacements virtuels dans le solide, l'intégration par rapport au temps du principe des puissances virtuelles se fait directement (pas de changement de configuration) et donne la quantité suivante à annuler :

$$\begin{aligned} \forall \vec{u}^*, W(\underline{\sigma}, \vec{u}^*) &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{u}^*) dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv \\ &- \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u}^* ds = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Cette équation conduit à vérifier l'équilibre local et à définir le tenseur des contraintes. Elle est à la base des méthodes énergétiques de résolution des problèmes de mécanique des milieux continus. Pour cela, on introduit les champs de déplacement cinématiquement admissibles et les champs de contraintes statiquement admissibles :

- Un Champ Cinématiquement Admissibles (CCA) est un champ de déplacements \vec{u}^* qui vérifie toutes les données cinématiques du problème. Il est continu dans Ω et sur $\partial\Omega$, continûment dérivable par morceaux sur Ω , et satisfait les conditions aux limites en déplacement :

$$\vec{u}^* = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_U \quad (8)$$

où \vec{U} est un déplacement connu. La solution associée à un CCA est un champ de contraintes qui est obtenu en calculant les déformations, et en appliquant la loi de comportement du matériau. Ce champ de contraintes ne satisfait pas forcément l'équilibre de la structure et/ou les conditions aux limites en pression.

- Un Champ Statiquement Admissible (CSA) est un champ de contraintes $\underline{\sigma}^*$ qui vérifie toutes les données statiques du problème. Il est continu dans Ω et sur $\partial\Omega$, continûment dérivable par morceaux sur Ω , et vérifie les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en efforts :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{\sigma}^*) + \vec{f}_v = \vec{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (9)$$

où \vec{T} est une pression connue. La solution associée à un CSA est un champ de déplacements qui est obtenu en appliquant la loi de comportement pour obtenir les déformations, puis en remontant aux déplacements en respectant les équations de compatibilité. Ce champ de déplacements ne satisfait pas forcément les conditions aux limites en déplacements.

2 Formulation variationnelle

2.1 Approche en déplacements

Pour introduire une formulation variationnelle en déplacements, les déplacements virtuels \vec{u}^* sont choisis comme variation des déplacements réels \vec{u} , $\vec{u}^* = \vec{u} + \delta\vec{u}$, l'opérateur δ vérifiant les propriétés $\delta(\delta\vec{u}) = \vec{0}$, $\delta(\underline{grad}(\vec{u})) = \underline{grad}(\delta\vec{u})$ et $\int_{\Omega} \delta\vec{u} dv = \delta(\int_{\Omega} \vec{u} dv)$. De plus, cette variation est choisie au sein des champs cinématiquement admissibles (CCA), de sorte que l'on a $\delta\vec{u} = \vec{0}$ sur $\partial\Omega_U$. En exprimant enfin les contraintes en fonction du champ de déplacements \vec{u} , et en utilisant le fait que la solution réelle \vec{u} annule la quantité W , on obtient l'expression suivante à annuler, où \underline{C} représente le tenseur de rigidité du matériau :

$$W(\vec{u}, \delta\vec{u}) = \int_{\Omega} \underline{grad}(\vec{u}) : \underline{C} : \underline{grad}(\delta\vec{u}) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta\vec{u} dv - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T} \cdot \delta\vec{u} ds \quad (10)$$

Cette expression à annuler est ensuite exprimée comme la variation d'une énergie $\Pi_p(\vec{u})$ sous la forme :

$$W(\vec{u}, \delta\vec{u}) = \delta(\Pi_p(\vec{u})) = \frac{\partial \Pi_p}{\partial \vec{u}} \cdot \delta\vec{u} \quad (11)$$

avec :

$$\Pi_p(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\text{grad}}(\vec{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\text{grad}}(\vec{u}) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T} \cdot \vec{u} ds \quad (12)$$

Cette fonction est appelée "énergie potentielle". Sa variation au second ordre est donnée par :

$$\delta^2(\Pi_p(\vec{u})) = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}}(\delta\vec{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\text{grad}}(\delta\vec{u}) dv \quad (13)$$

Puisque les termes C_{ijkl} forment une matrice définie positive en (ij) , (kl) , alors cette variation au second ordre est strictement positive, et la solution du problème correspond à un minimum de l'énergie potentielle. L'approche énergétique en déplacements est également appelée "modèle variationnel en déplacements". Le principe est de se donner un champ de déplacements virtuels paramétré et cinématiquement admissible, de calculer l'énergie potentielle correspondante, et de la minimiser pour s'approcher de la solution réelle. On peut ainsi obtenir une approximation de la solution réelle, qui aura donc une énergie potentielle supérieure à la solution exacte, et constituera une borne supérieure. Cette méthode est donc également appelée "méthode de la borne supérieure".

2.2 Approche en contraintes

L'approche en contraintes consiste à considérer le champ de contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^* - \delta\underline{\sigma}$, où $\underline{\sigma}^*$ est un champ de contraintes virtuel statiquement admissible, c'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibres et les conditions aux limites en pression (sur $\partial\Omega_T$). La quantité à annuler peut alors s'écrire au premier ordre, en introduisant le tenseur $\underline{\underline{S}}$ des complaisances élastiques et en notant $\vec{u}^* = \vec{u} + \delta\vec{u}$ (où \vec{u} est le champ réel, mais où \vec{u}^* n'est pas nécessairement cinématiquement admissible) :

$$\begin{aligned}
W(\underline{\sigma}, \delta \underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^* - \delta \underline{\sigma}) : \underline{\text{grad}}(\vec{u}^*) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u}^* ds \\
&= - \int_{\Omega} \delta \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}}(\vec{u}^*) dv - \int_{\partial\Omega} (\vec{t} - \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^* ds \\
&= - \int_{\Omega} \delta \underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dv + \int_{\partial\Omega_U} \delta \underline{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{U} ds
\end{aligned} \tag{14}$$

Cette expression à annuler est ensuite exprimée comme la variation d'une énergie $\Pi_c(\underline{\sigma})$ sous la forme :

$$W(\underline{\sigma}, \delta \underline{\sigma}) = \delta(\Pi_c(\underline{\sigma})) = \frac{\partial \Pi_c}{\partial \underline{\sigma}} : \delta \underline{\sigma} \tag{15}$$

avec :

$$\Pi_c(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dv + \int_{\partial\Omega_U} (\underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} ds \tag{16}$$

Cette fonctionnelle est appelée "énergie complémentaire". Sa variation au second ordre est donnée par :

$$\delta^2(\Pi_c(\underline{\sigma})) = - \int_{\Omega} \delta \underline{\sigma} : \underline{S} : \delta \underline{\sigma} dv \tag{17}$$

Puisque les S_{ijkl} forment une matrice définie positive en $(ij), (kl)$, alors cette variation au second ordre est strictement négative, et la solution du problème correspond à un maximum de l'énergie complémentaire. Cette approche est également appelée "modèle variationnel en contraintes", ou "méthode de la borne inférieure". En effet, la solution obtenue par ce modèle aura une énergie inférieure à la solution réelle.

2.3 Encadrement

Les formulations variationnelles en déplacements et en contraintes permettent d'obtenir des solutions approchées à un problème de mécanique des milieux continus. De plus, si \vec{u}^* est un champ de déplacement cinématiquement admissible obtenu par l'approche en déplacements, et si $\vec{\sigma}^*$ est un champ de contraintes statiquement admissible obtenu par l'approche en contraintes, alors on peut encadrer la solution réelle $(\vec{\sigma}, \vec{u})$ sous la forme :

$$\Pi_c(\underline{\sigma}^*) \leq \Pi_c(\underline{\sigma}) = \Pi_p(\vec{u}) \leq \Pi_p(\vec{u}^*) \quad (18)$$