

CHAPITRE VII

ELASTICITE PLANE

- I. Les deux états plans d'élasticité**
 - I.1. Etat plan de contrainte*
 - I.2. Etat plan de déformation*
- II. Les équations fondamentales de l'élasticité plane**
 - II.1. Les équations d'équilibre**
 - II.1.1. Les équations différentielles d'équilibre
 - II.1.2. Les conditions de contour
 - II.1.3. Changement d'axe
 - II.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes**
- III. La fonction d'Airy**
 - III.1. Forces de volume nulles*
 - III.2. Forces de volume dérivant d'un potentiel*
- IV. Application à la théorie des poutres**
 - IV.1. Solution de l'équation biharmonique par des polynômes*
 - IV.2. Détermination des déplacements*
 - IV.3. Exemple d'application : la poutre console*
- V. Étude de quelques problèmes en coordonnées polaires**
 - V.1. Expression des contraintes en coordonnées curvilignes*
 - V.2. Equations générales en coordonnées polaires*
 - V.2.1. Expression des contraintes en coordonnées polaires
 - V.2.2. Equation à satisfaire par la fonction d'Airy dans le cas de forces de volume nulles
 - V.2.3. Expression du tenseur des déformations
- VI. Exercices résolus**

Dans ce chapitre nous étudierons plus en détail le comportement des matériaux dans le régime élastique. Ce régime concerne l'utilisation des structures dans la vie courante sans déformations permanentes (ponts, voitures, avions, trains, structures du génie civil, ...).

I. LES DEUX ETATS PLANS D'ELASTICITE

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs.

I.1. Etat plan de contrainte

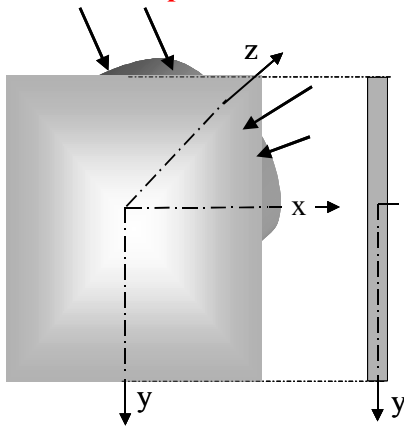


Figure 1. Disque en état plan de contraintes.

Considérons (figure 1) un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. Les contraintes σ_{zz} , σ_{zx} et σ_{zy} sont nulles sur les deux faces du disque. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre à l'intérieur du disque que des valeurs très faibles par rapport à σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} . L'on ne commet pas une erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles sur tout plan intérieur parallèle aux faces.

Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} ne dépendent pratiquement pas de z , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulles. La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope montre que la déformation ϵ_{zz} est non nulle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{bmatrix} \quad (2)$$

En inversant les expressions de ε_{xx} et ε_{yy} dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

I.2. Etat plan de déformation

Considérons un tunnel ou un puits de mine (figure 2 a) de très grande étendue selon la direction z . Si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identiques. Sur la figure 2 b est représentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction transversale (DT), il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre les cylindres du laminoir et la tôle. Les deux exemples de la figure 2 rentrent dans le cadre des déformations planes.

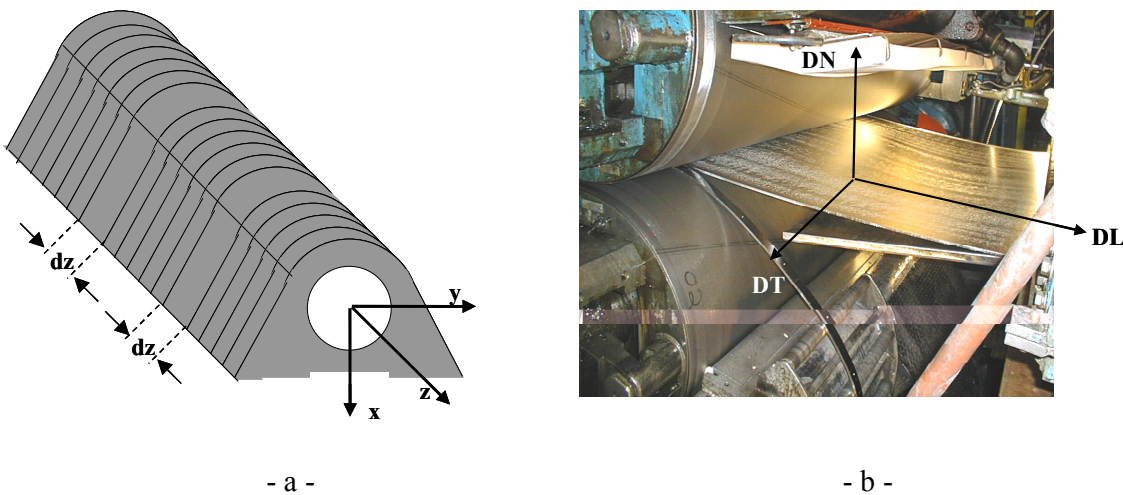


Figure 2. Exemples de structures en déformation plane : puit de mine (a) et tôle en laminage (b).

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La composante non nulle σ_{zz} du tenseur des contraintes s'obtient par la loi de Hooke. Dans un matériau isotrope élastique σ_{zz} vaut :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Les autres composantes non nulles du tenseur des contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases}$$

soit en réarrangeant les différents termes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases} \quad (5)$$

Ayant résolu un problème de contraintes planes, il est souvent utile de connaître la solution du problème correspondant de déformation plane. C'est le cas par exemple si l'on veut résoudre expérimentalement un problème de déformation plane. Le moyen le plus simple

consiste à effectuer les mesures sur un disque mince représentant le problème de contraintes planes correspondant, puis à repasser au problème initial. Pour ce faire, point n'est besoin de recommencer tous les calculs. Il suffit de faire les substitutions suivantes :

Pour passer de contraintes planes en déformations planes

$$E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1-\nu)} \quad (6)$$

et pour passer de déformations planes aux contraintes planes

$$E \rightarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2} \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1+\nu)} \quad (7)$$

Les deux transformations précédentes laissent inchangée l'expression du module de cisaillement ou de Coulomb G , en fonction de E et ν .

II. LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ELASTICITE PLANE

II.1. Les équations d'équilibre

II.1.1. Les equations différentielles d'équilibre

En annulant σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{zy} et en adoptant X et Y pour les composantes des forces volumiques dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

II.1.2. Les conditions de contour

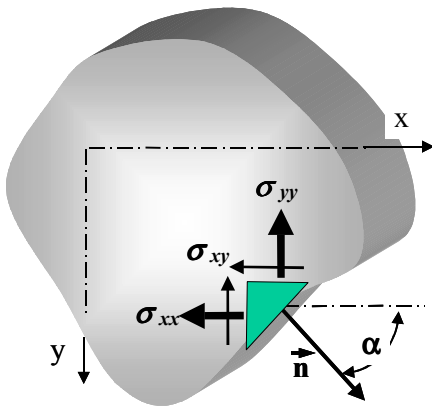


Figure 4. Conditions de contour en contraintes planes.

Soient $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient T_x et T_y les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = T_x \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = T_y \end{cases} \quad (9)$$

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnées du prisme élémentaire sur la figure 4.

II.1.3. Changement d'axe

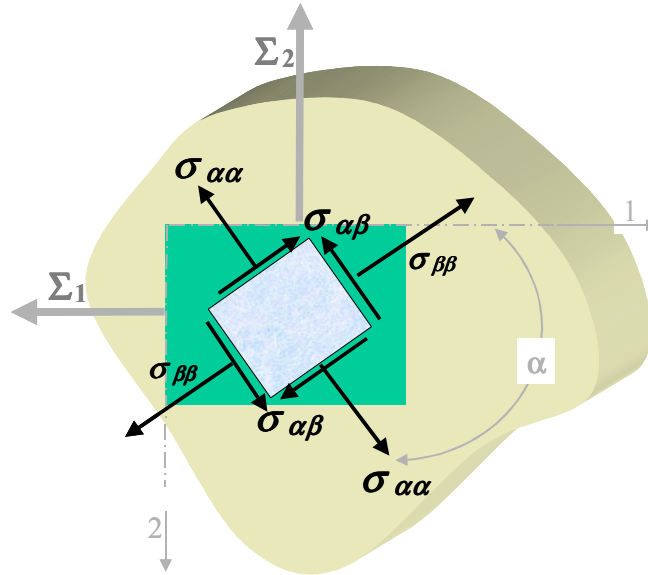


Figure 5. Contraintes sur deux facettes orthogonales.

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ($\sigma_{12}=0$) et Σ_1, Σ_2 (figure 5) les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\alpha} = \Sigma_1 \cos^2 \alpha + \Sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left(\frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \epsilon_{\alpha\beta} = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{array} \right. \quad (10)$$

II.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent (chapitre 2).

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

Si les déformations ε_{xz} , ε_{yz} sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de z , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0} \quad (11)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'Airy.

III. LA FONCTION D'AIRY

III.1. Forces de volume nulles

Considérons les équations d'équilibres dans le cas où les forces de volume sont nulles

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy Φ (exercices résolus) :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

En combinant, la définition (12) des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité (11), on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique (exercice résolue) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (13)$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction Φ qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

III.2. Forces de volume dérivant d'un potentiel

Nous allons à présent considérer un cas plus général et admettre qu'il existe des forces de volume \vec{F} dérivant d'un potentiel V sous la forme

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}V} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Les équations d'équilibre en translation s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} + V)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + V)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ces équations ont la même forme que les équations d'équilibre sans forces de volume et sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy Φ :

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (16)$$

En combinant, la définition (15) des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité (11), on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique (exercice résolue) :

en état de déformations planes:

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V \quad (17)$$

et en état de contraintes planes

$$\Delta\Delta\Phi = (1-\nu) \Delta V \quad (18)$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction Φ qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

IV. APPLICATION A LA THEORIE DES POUTRES

IV.1. Solution de l'équation biharmonique par des polynômes

On a montré que la solution des problèmes d'élasticité plane, dans le cas particulier où les forces de volumes sont nulles ou constantes se réduit à l'intégration de l'équation biharmonique.

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

moyennant les conditions à la surface. Dans le cas des poutres ayant une section rectangulaire de faible épaisseur, on peut trouver des solutions pratiquement intéressantes en adoptant comme expression de Φ des polynômes de divers degrés et en ajustant leurs coefficients de façon adéquate. Il est facile de voir que le polynôme quadratique

$$\varphi_2(x, y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

est toujours biharmonique. Il y correspondent des états de traction pure et de cisaillement pure (figure 6).

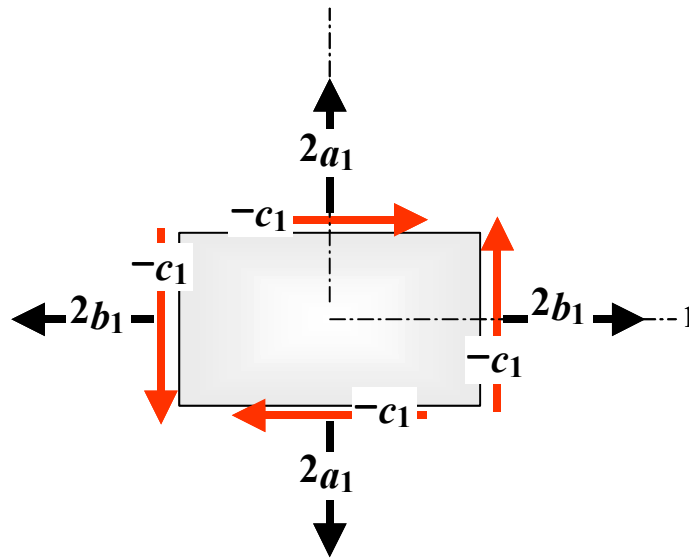


Figure 6. Etat de contrainte généré par une fonction d'aire biquadratique.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

La fonction cubique $\varphi_3(x, y) = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3$ est aussi toujours biharmonique. Cette fonction permet de générer des contraintes de tractions constantes, des contraintes de cisaillement constantes et des contraintes de tractions simulant de la flexion :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3x + 6d_3y & -2b_3x - 2c_3y \\ -2b_3x - 2c_3y & 6a_3x + 2b_3y \end{pmatrix}$$

IV.2. Détermination des déplacements

Connaissant les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} , on peut en déduire les déformations par la loi de Hooke. Une fois les déformations calculées, il faut en déduire les déplacements u et v .

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right)$$

En intégrant les deux premières équations on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \varepsilon_{xx} dx + f_1(y) \\ v(x, y) &= \int \varepsilon_{yy} dy + f_2(x) \end{aligned}$$

On dérive en suite ces expressions par rapport à y et x respectivement et on introduit ces dérivées dans les définitions de la déformation de cisaillement. Au total on constate que l'intégration introduit certaines constantes d'intégration, et que les expressions de u et v contiennent de ce fait les fonctions linéaires arbitraires

$$u_1 = a + by \quad v_1 = c - bx$$

où a , b et c sont des constantes arbitraires. Les déplacements u_1 et v_1 conduisent à

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$$

c'est-à-dire que ces déplacements ne donnent pas lieu à une déformation, mais seulement un mouvement d'ensemble. Les constantes d'intégration a et c représentent un mouvement de translation du corps et la constante b un petit angle de rotation autour de l'axe des z. Il faut, dans chaque problème particulier déterminer les valeurs de ces constantes par les conditions de fixation.

IV.3. Exemple d'application : la poutre console

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchie par une force P appliquée à son extrémité libre (figure 7).

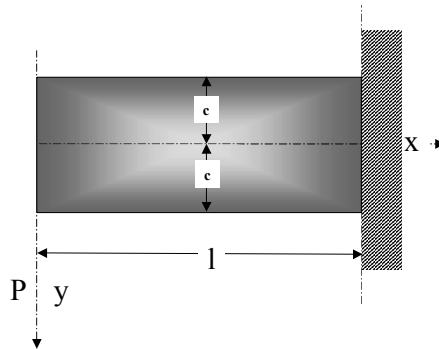


Figure 7. Poutre console chargée par une force distribuée à son extrémité libre.

Dans le cours de Résistance des Matériaux, la flexion des poutres est traitée en détails. On montre que la flexion de la poutre console donne lieu aux contraintes suivantes (exercice résolu) :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -\frac{3P}{2\Omega} \left(1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right)$$

où I est le moment d'inertie de la section droite et Ω est sa section.

V. ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES EN COORDONNEES POLAIRES

V.1. Expression des contraintes en coordonnées curvilignes

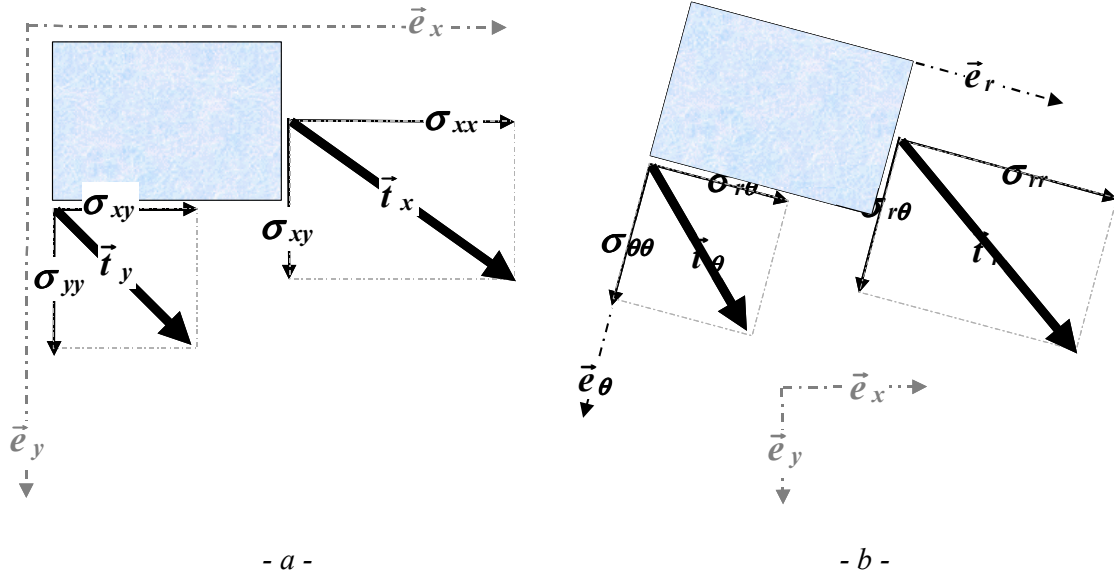


Figure 5. Vecteur contrainte sur deux facettes orthogonales dans le système cartésien (a) et dans le système de coordonnées curvilignes (b).

Pour déterminer l'expression des contraintes en coordonnées curvilignes quelconques, nous passons d'abord par l'expression du vecteur contrainte sur deux facettes orthogonales dans le système cartésien. Sur la facette orthogonale à l'axe des x et la facette orthogonale à l'axe des y, le vecteur contrainte s'écrit respectivement :

$$\begin{cases} \vec{t}_x = \sigma_{xx}\vec{e}_x + \sigma_{xy}\vec{e}_y \\ \vec{t}_y = \sigma_{xy}\vec{e}_x + \sigma_{yy}\vec{e}_y \end{cases} \quad (19)$$

où \vec{e}_x et \vec{e}_y sont respectivement les vecteurs unitaires dans la direction des x et dans la direction des y. Les vecteurs contraintes peuvent s'exprimer à partir de la fonction d'Airy :

$$\begin{cases} \bar{t}_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \bar{e}_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \bar{e}_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{e}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{e}_y \right\} \\ \bar{t}_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \bar{e}_x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \bar{e}_y = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{e}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{e}_y \right\} \end{cases}$$

L'expression entre parenthèses dans les membres de droite n'est rien d'autre que le produit vectoriel de $\overline{\text{grad}}\Phi$ par le vecteur unitaire \bar{e}_z . Donc les vecteurs contraintes \bar{t}_x et \bar{t}_y peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{t}_x = \frac{\partial}{\partial y} \{ \overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z \} \\ \bar{t}_y = -\frac{\partial}{\partial x} \{ \overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z \} \end{cases} \quad (20)$$

Or la quantité $\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z$ est indépendante du choix des axes x, y . Par conséquent, les formules ci-dessus ont une validité générale et, pour deux directions orthogonales quelconques r, t disposées comme les axes x et y , on a :

$$\begin{cases} \bar{t}_r = \frac{\partial}{\partial t} \{ \overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z \} \\ \bar{t}_t = -\frac{\partial}{\partial r} \{ \overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z \} \end{cases} \quad (21)$$

Ces formules montrent que pour définir un champ plan de contraintes, il suffit de donner le champ de vecteurs $\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \bar{e}_z$ qui n'est défini qu'à une constante près de sorte que Φ n'est définie qu'à une fonction linéaire près, de la forme $(ax+by+c)$.

V.2. EQUATIONS GENERALES EN COORDONNEES POLAIRES

V.2.1. Expression des contraintes en coordonnées polaires

Les équations précédentes peuvent être appliquées en coordonnées polaires. θ est compté positivement en tournant de l'axe des x vers l'axe des y. La transformation de coordonnées est définies comme suit :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Le gradient s'écrit en coordonnées polaires sous la forme (exercices résolus) :

$$\overline{\text{grad}}\Phi = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

\vec{e}_r et \vec{e}_θ sont les vecteurs unitaires tangentes aux lignes coordonnées $r=\text{constante}$ et $\theta=\text{constante}$. Nous trouvons l'expression de la dérivée suivant r et t par identification

$$\overline{\text{grad}}\Phi = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \vec{e}_t \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont mutuellement orthogonaux (exercice résolu). Le vecteur \vec{e}_z est choisi de façon à ce que $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ forme un trièdre direct. Ainsi, nous avons :

$$\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z = \left[\vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right] \wedge \vec{e}_z = \left[-\vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right]$$

et les vecteurs contraintes sur les facettes orthogonales à \vec{e}_r et \vec{e}_θ s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{t}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{e}_r - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right] \\ \vec{t}_\theta &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z \right] = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{e}_r - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les vecteurs coordonnées \bar{e}_r et \bar{e}_θ changent d'orientation quand la coordonnée θ change, on établit facilement les expressions suivantes pour les vecteurs contraintes \bar{t}_r et \bar{t}_θ :

$$\begin{aligned} \bar{t}_r &= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \bar{e}_r - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \bar{e}_\theta \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \\ \bar{t}_\theta &= - \left[\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right) \bar{e}_r - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \bar{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (22)$$

L'identification terme à terme entre les expressions des vecteurs contraintes et du tenseur contrainte donne (exercices résolus).

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

La contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ ne fait pas intervenir de dérivées selon θ . Pour des applications particulières, changer la dépendance de la fonction d'Airy en θ ne changera donc par l'expression de contrainte circonférentielle. La contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1 par rapport à θ et la contrainte radiale σ_{rr} ne fait intervenir que la dérivée première par rapport à r .

V.2.2. Equation à satisfaire par la fonction d’Airy dans le cas de forces de volume nulles

L’équation $\Delta\Delta\Phi = 0$ est indépendante du système de coordonnées. Pour exprimer le laplacien en coordonnées polaires, nous utilisons son expression symbolique :

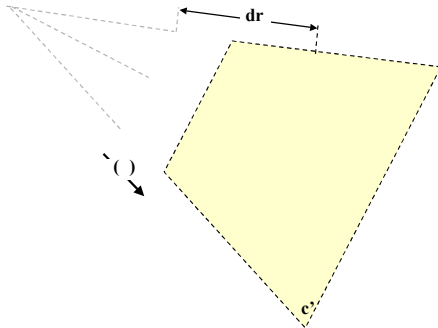
$$\Delta f = \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad} f})$$

L’expression du gradient en coordonnées polaires a été obtenue dans un exercice résolu. Pour déterminer l’expression de la divergence, nous nous servons du fait que la divergence du déplacement est égale à la trace du tenseur petite déformation (exercice résolu). Ainsi nous obtenons l’expression suivante pour le laplacien de la fonction d’Airy :

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \right)$$

Et la fonction d’Airy doit satisfaire l’équation suivante :

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \right) = 0 \quad (24)$$



- a -

- b -

- c -

- d -

Figure 6. Analyse des déformations en coordonnées polaires dues à un déplacement radial (a et b) et dues à un déplacement circonférentiel (c et d).

V.2.3. Expression du tenseur des déformations

En coordonnées polaires l'expression du tenseur des petites déformations peut s'obtenir en exprimant la partie symétrique du gradient des déplacements

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

dans le nouveau système de coordonnées. On peut aussi évaluer les déformation par la voie géométrique directe comme suit. Si u est le déplacement radial du côté ad de l'élément abcd de la figure 6 a, le déplacement radial du côté bc est :

$$u(r + dr) = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$$

L'allongement relatif de l'élément abcd dans la direction radiale est, par conséquent

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (25)$$

En ce qui concerne la déformation dans la direction circonférentielle, il faut observer qu'elle dépend non seulement du déplacement v mais également du déplacement radial u . Si l'on suppose, par exemple, que les points a et d de l'élément abcd (figure 6a) subissent uniquement le déplacement radial u , la nouvelle longueur de l'arc ad est $(r+du)d\theta$ et la déformation circonférentielle vaut, par conséquent u/r .

Sur la figure 6c, la différence de déplacement circonférentiel des côtés ab et cd de l'élément abcd est $(\partial v/\partial\theta)d\theta$. La longueur initiale de l'arc ac est $r d\theta$. La déformation circonférentielle due à cette différence de déplacement vaut donc : $(\partial v/r\partial\theta)$. La déformation circonférentielle totale vaut donc :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} \quad (26)$$

Evaluons maintenant la déformation tangentielle due au déplacement radial u (figure 6b). L'angle entre les direction ad et a'd' est dû au déplacement radial u et vaut $(\partial u/r\partial\theta)$. La déformation tangentielle due au déplacement circonférentielle est représentée sur la figure 6d. L'angle entre ab et a'b' est égal à $(\partial v/\partial r)$. Il faut noter qu'une partie de cet angle seulement

contribue à la distorsion. En effet, l'autre partie, égale à v/r représente le déplacement angulaire dû à la rotation de l'élément abcd comme un corps rigide autour de l'axe passant par l'origine. Par conséquent, la variation totale de l'angle $d\alpha$ représentant la distorsion est

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (27)$$

VI. EXERCICES RESOLUS

VI.1. Fonction d'Airy

VI.1.1. Equations d'équilibre :

Enoncé :

En partant de la définition (12) des contraintes à partir de la fonction d'Airy, démontrez que les contraintes satisfont nécessairement l'équation d'équilibre en translation.

Solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} = 0 \end{array} \right.$$

VI.1.2. Biharmonicité de la fonction d'Airy :

Enoncé

En partant de la définition (12) des contraintes à partir de la fonction d'Airy, des équations de compatibilité (11) et de la loi de Hooke, démontrez que la fonction d'Airy est biharmonique.

Solution :

La loi de Hooke et la définition des contraintes à partir de la fonction d'Airy permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{E} \quad \sigma_{zz} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ en contraintes planes} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu)\sigma_{xy}}{E} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} = \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right\} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E} = \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right\} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1+\nu)\sigma_{xy}}{E} = -\frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}$$

Ainsi les dérivées des déformations s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) - \nu \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right) - \nu \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} \right) \right\} \\ -2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} \right)\end{aligned}$$

L'équation de compatibilité conduit donc à

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial x} = \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right) + \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) + 2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right\} = 0 \quad (c.q.f.d.)$$

VI.1.3. Forces de volume dérivant d'un potentiel

Enoncé :

Démontrez que dans le cas de forces de volume \vec{F} dérivant d'un potentiel V , la fonction d'Airy Φ doit satisfaire les équations suivantes (17) ou (18) en état plan de déformation et en état de contraintes planes respectivement.

Solution

Les déformations peuvent s'exprimer sous la forme suivante en fonction des contraintes

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\alpha \sigma_{xx} - \beta \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [-\beta \sigma_{xx} + \alpha \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{(1+\nu) \sigma_{xy}}{E} \end{cases}$$

où $\alpha = (1-\nu)(1+\nu)$, $\beta = (1+\nu)\nu$ en état de déformations planes et $\alpha = 1$, $\beta = \nu$ en état de contraintes planes respectivement. Ainsi, nous obtenons les expressions suivantes des déformations à partir de la fonction d'Airy :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\alpha \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right] - \beta \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right] \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[-\beta \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right] + \alpha \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right] \right] \\ \varepsilon_{xy} = -\frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - V \right] \end{cases}$$

Les dérivées des déformations s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] - \beta \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] - \beta \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] \right\} \\ -2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} \right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{E} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right] + 2[(1+\nu) - \beta] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} - (\alpha - \beta) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] \right\} = 0$$

En déformation plane $\alpha = (1-\nu)(1+\nu)$, $\beta = (1+\nu)\nu$ donc $\alpha - \beta = (1+\nu)(1-2\nu)$ et $1+\nu - \beta = \alpha$, ainsi

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \text{ (c.q.f.d.)}$$

En contraintes planes $\alpha = 1$, $\beta = \nu$ donc $\alpha - \beta = (1 - \nu)$ et $1 + \nu - \beta = \alpha$, ainsi

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha} = 1 - \nu \text{ (c.q.f.d.)}$$

VI.2. La poutre console

Enoncé

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchie par une force P appliquée à son extrémité libre (figure 7). Démontrez que les contraintes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -\frac{3P}{2\Omega} \left(1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right)$$

où I est le moment d'inertie de la section droite et Ω est sa section.

Indication

Choisir pour la fonction d'Airy l'expression

$$\varphi(x, y) = b_2 xy + \frac{d_4 x y^3}{12}$$

Solution

On obtient l'expression suivante pour les contraintes

$$\sigma_{xx} = d_4 xy \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -b_2 + \frac{d_4 y^2}{2}$$

Pour rendre les côtés longitudinaux libres de toute force on doit avoir

$$\sigma_{xy} \Big|_{y=\pm c} = -b_2 + \frac{d_4 c^2}{2} = 0$$

Il faut en plus satisfaire l'équilibre sur le bord chargé par la force distribuée P :

Les vecteurs unitaires correspondants sont donc

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{E}_r}{\|\vec{E}_r\|} = \frac{\vec{E}_r}{h_r} = \vec{E}_r \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \frac{\vec{E}_\theta}{\|\vec{E}_\theta\|} = \frac{\vec{E}_\theta}{h_\theta} = \frac{\vec{E}_\theta}{r}$$

où h_r et h_θ sont respectivement les modules des vecteurs \vec{E}_r et \vec{E}_θ . Le gradient s'exprime sous la forme suivante en coordonnées polaires :

$$\overline{\text{grad}}\Phi = \frac{1}{h_r} \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{h_\theta} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

Ainsi nous trouvons par identification

$$\overline{\text{grad}}\Phi = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \vec{e}_t \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

VI.3.2. Expression des vecteurs contraintes en coordonnées polaires

Enoncé

Déterminez l'expression des vecteurs contraintes en coordonnées polaires.

Solution

Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont mutuellement orthogonaux. Le vecteur \vec{e}_z est choisi de façon à ce que $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ forme un trièdre direct. Ainsi, nous avons :

$$\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z = \left[\vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right] \wedge \vec{e}_z = \left[-\vec{e}_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right]$$

Ainsi les vecteurs contraintes sur les facettes orthogonales à \vec{e}_r et \vec{e}_θ s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{t}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{e}_r - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right] \\ \vec{t}_\theta &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\overline{\text{grad}}\Phi \wedge \vec{e}_z \right] = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{e}_r - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned}$$

Or dans expressions précédentes, il faut tenir compte du fait que l'orientation des vecteurs de base change quand la coordonnée θ change :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{e}_r = \bar{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{e}_\theta = -\bar{e}_r$$

Ainsi, nous obtenons finalement les expressions suivantes pour les vecteurs contraintes \bar{t}_r et \bar{t}_θ

$$\bar{t}_r = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \bar{e}_r - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \bar{e}_\theta \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \bar{e}_\theta$$

$$\bar{t}_\theta = - \left[\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right) \bar{e}_r - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \bar{e}_\theta \right]$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv = \int_{S_u} \left(\delta \underline{\underline{\sigma}}^{SA} \vec{n} \right)^T \vec{u} \, dS_\sigma}$$