Mécanique des milieux continus

Helmut Klöcker
Tél. : 0078
klocker@emse.fr
Bureau : H .1

Chapitre V : Méthodes énergétiques

Chercher la «meilleure » solution aux équations de l'élasticité

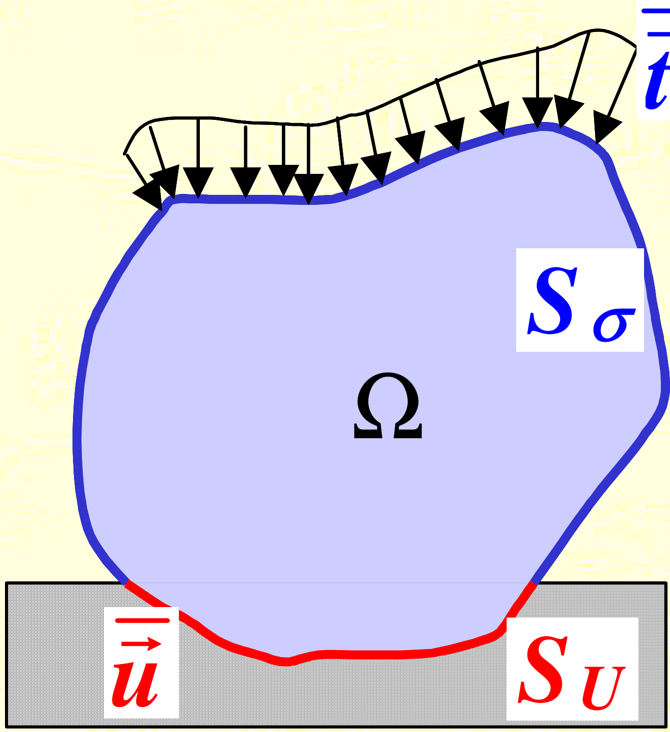
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underbrace{\begin{cases} div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{f} = 0 \;\; \underline{\underline{\sigma}}^{T} = \underline{\underline{\sigma}} \;\; \forall \vec{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{t}^{\,imposé} = \bar{\vec{t}} \quad \forall \vec{x} \in S_{\sigma} \end{cases}}_{\text{satisfait approximativement}}$$

ou

$$\underbrace{\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + \left(\nabla\vec{u}\right)^{T}\right] \forall \vec{x} \in \Omega \\ \vec{u} = \vec{u}^{\,imposé} = \bar{\vec{u}} \quad \forall \vec{x} \in S_{U} \end{cases}}_{\textit{satisfait}\ \text{approximativement}}$$

I. Champ de déplacement cinématiquement admissible et champ de contrainte statiquement admissible



$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \dfrac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}^{CA} + \left(\nabla\vec{u}^{CA}\right)^T\right] \forall\vec{x} \in \Omega \\ \vec{u}^{CA} = \vec{u}^{imposé} = \overline{\vec{u}} \quad \forall\vec{x} \in S_U \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\left(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right) + \vec{f} = 0 \; \underline{\underline{\sigma}}^{SA^T} = \underline{\underline{\sigma}}^{SA} \quad \forall\vec{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n} = \vec{t}^{imposé} = \overline{\vec{t}} \quad \forall\vec{x} \in S_\sigma \end{cases}$$

II. Equation des travaux virtuels

II.1. Conservation de l'énergie

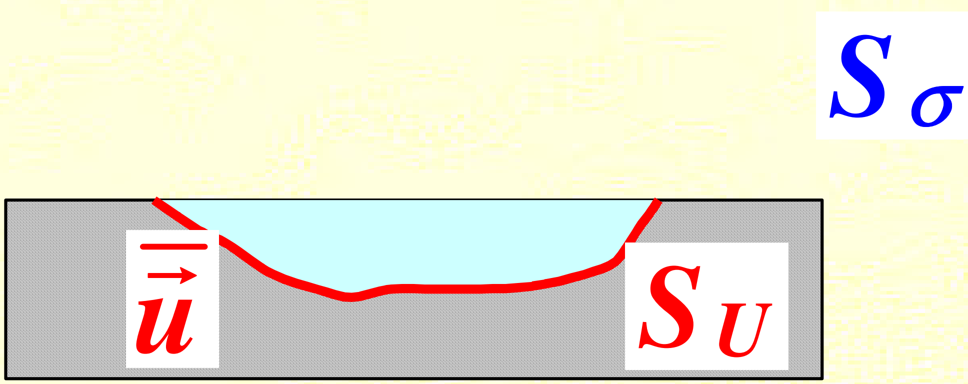
$$\overbrace{\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_\Omega \left(\vec{\sigma}^{SA}\right)^T \vec{\varepsilon}^{CA}\, dv}^{\text{énergie stockée dans le matériau}}$$

$$= \underbrace{\int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \vec{u}^{CA} dS_\sigma + \int_{S_U} \vec{t}^T \overline{\vec{u}}\, dS_U + \int_\Omega \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega}_{\text{énergie fournie au matériau}} \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall \vec{u}^{CA} \\ \forall \vec{\sigma}^{SA} \end{array}\right.$$

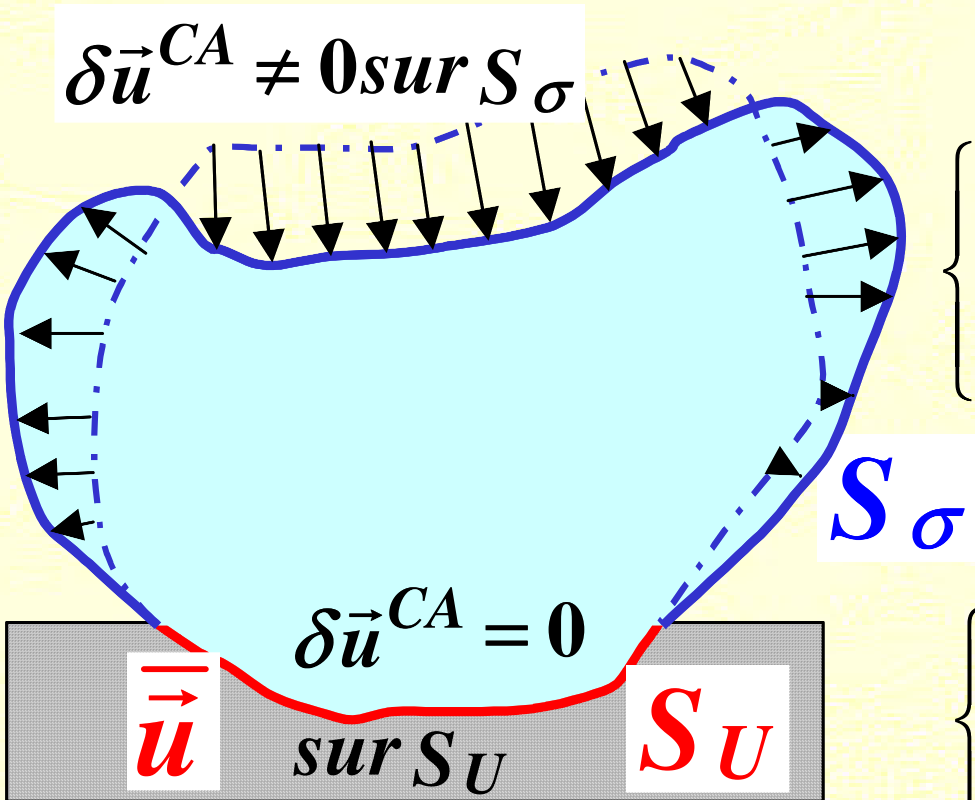
$$\underline{\underline{\sigma}} \neq \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

II. Equation des travaux virtuels

II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements



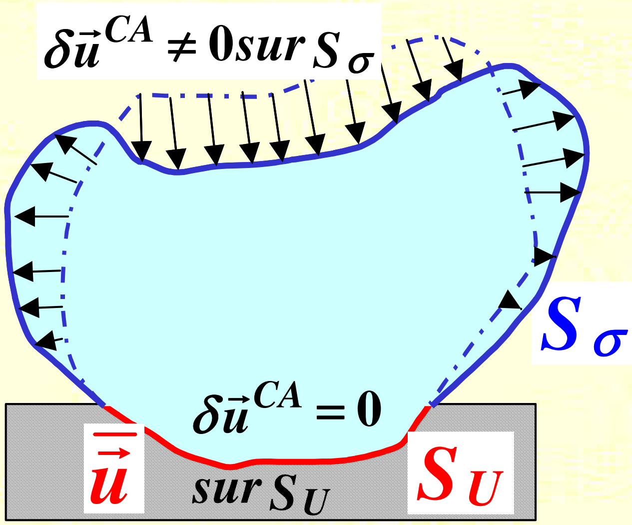
II. Equation des travaux virtuels
II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements



$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}^{CA} + \left(\nabla\vec{u}^{CA}\right)^T\right] \forall\vec{x} \in \Omega \\ \vec{u}^{CA} = \vec{u}^{imposé} = \overline{\vec{u}} \quad \forall\vec{x} \in S_U \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{cases} div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{f} = 0 \; \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}} \; \forall\vec{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}\vec{n} = \vec{t}^{imposé} = \overline{\vec{t}} \quad \forall\vec{x} \in S_\sigma \end{cases}}_{\text{satisfait approximativement}}$$

II. Equation des travaux virtuels
II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements



Si le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre

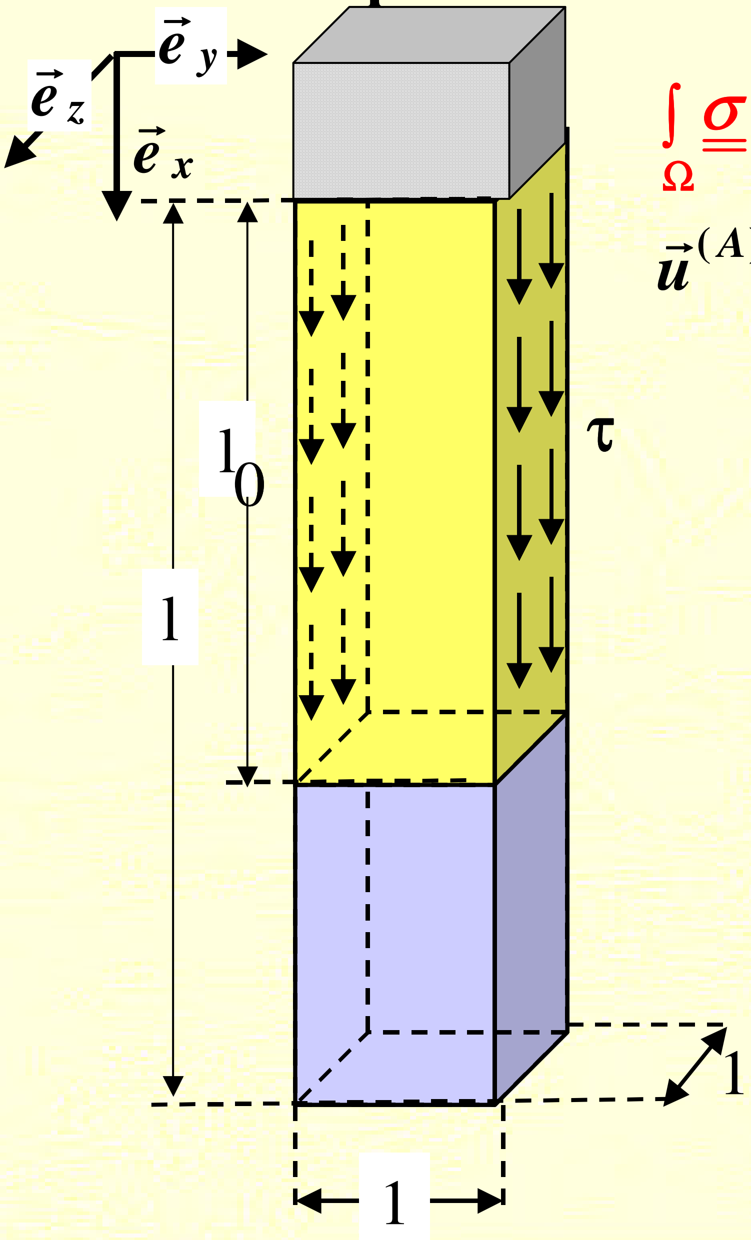
$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} dS_\sigma + \int_\Omega \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega$$

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{2}\left\{\left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right] + \left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right]^T\right\}$$

Inversement tout champ de déplacement cinématiquement admissible $\delta\vec{u}^{CA}$ qui satisfait l'équation précédente entraîne l'équilibre.

II. Equation des travaux virtuels

II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements : exemple



$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \vec{t}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} dS_\sigma + \int_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d\Omega$$

$$\vec{u}^{(A)} = ax\vec{e}_x \quad \delta\vec{u}^{(A)} = \delta a x \vec{e}_x \quad \varepsilon_{xx} = a$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Ea$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{\Omega} Ea(\delta a) dv$$

$$= Ea\Omega(\delta a) = Ea(\delta a) l_0$$

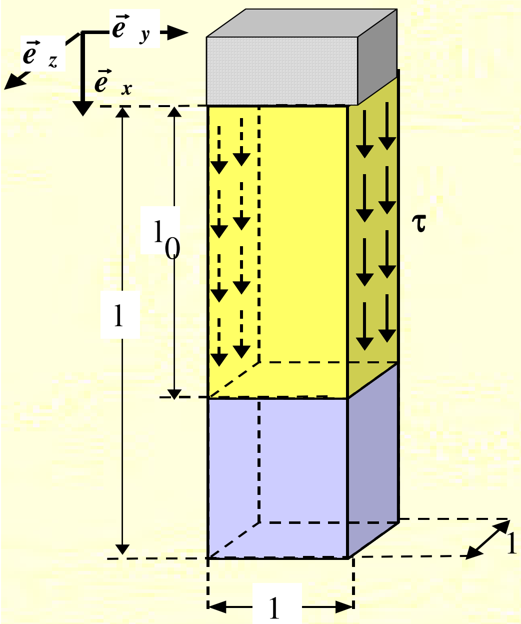
$$\int_{S_\sigma} \vec{t}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} dS_\sigma = \int_{S_\sigma} \tau(\delta a) x dS_\sigma$$

$$= \tau(\delta a) \int_{S_\sigma} x dS_\sigma = \frac{\tau(\delta a) l_0^2}{2}$$

II. Equation des travaux virtuels

II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements : exemple

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \vec{t}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d\Omega$$

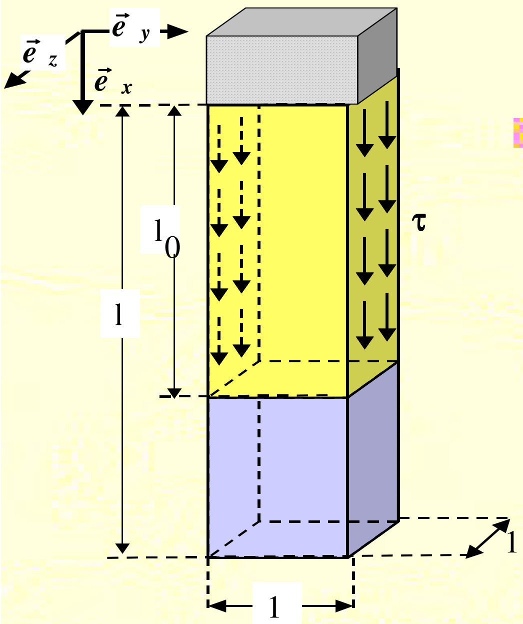


$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = Ea(\delta a) l_0 \\ &= \int_{S_\sigma} \vec{t}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma = \frac{\tau (\delta a) l_0^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \tau \frac{l_0}{2E}$$

$$\vec{u}^{(A)} = \frac{\tau l_0 x}{2E} \vec{e}_x \qquad \sigma_{xx} = \frac{l_0 \tau}{2}$$

II. Equation des travaux virtuels

II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements : exemple

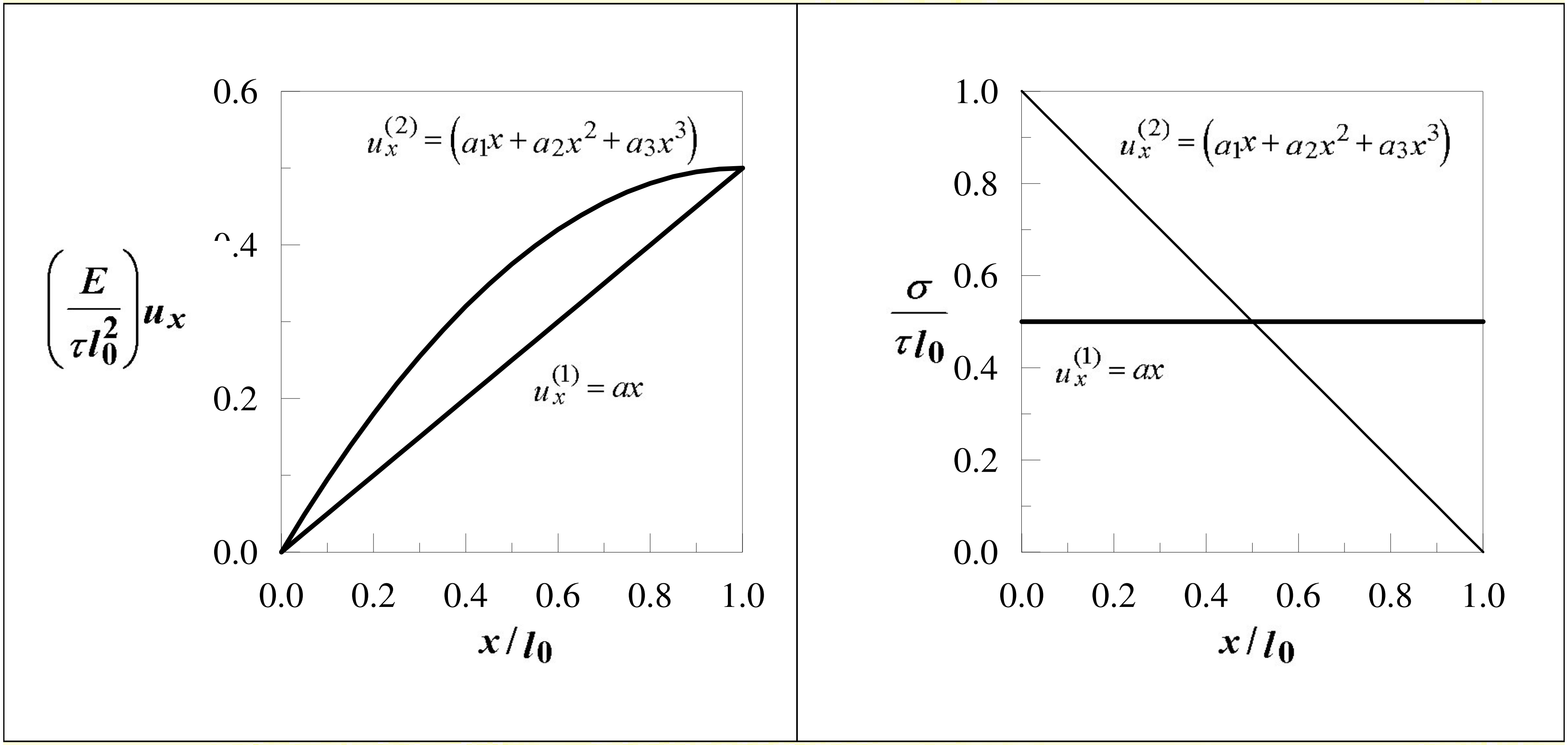


Est-ce la bonne solution ?

$$\vec{u}^{(A)} = \frac{\tau l_0 x}{2E}\vec{e}_x \quad \sigma_{xx} = \frac{l_0 \tau}{2}$$

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$

est meilleure ?



0.6
0.4
0.2
0.0
$u_x^{(2)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)$
$u_x^{(1)} = ax$
$\left(\frac{E}{\tau l_0^2}\right) u_x$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
x / l_0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$u_x^{(2)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)$
$u_x^{(1)} = ax$
$\frac{\sigma}{\tau l_0}$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
x / l_0

II. Equation des travaux virtuels
II.3. Principe des travaux virtuels des contraintes

Si le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre

$$\int_{\Omega} \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dv = \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_{\sigma}$$

est vérifié pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible. Inversement si l'équation précédente est statisfaite pour tout champ de contrainte statiquement admissible, l'équation de compatibilité est satifaite.

II. Equation des travaux virtuels
II.3. Principe des travaux virtuels des contraintes

$$\underbrace{\begin{cases} div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)+\vec{f}=0 \;\; \underline{\underline{\sigma}}^T=\underline{\underline{\sigma}} \;\; \forall\vec{x}\in\Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}=\vec{t}^{\,imposé}=\overline{\vec{t}} \;\; \forall\vec{x}\in S_\sigma \end{cases}}_{\text{satisfait exactement par hypothèse}}$$

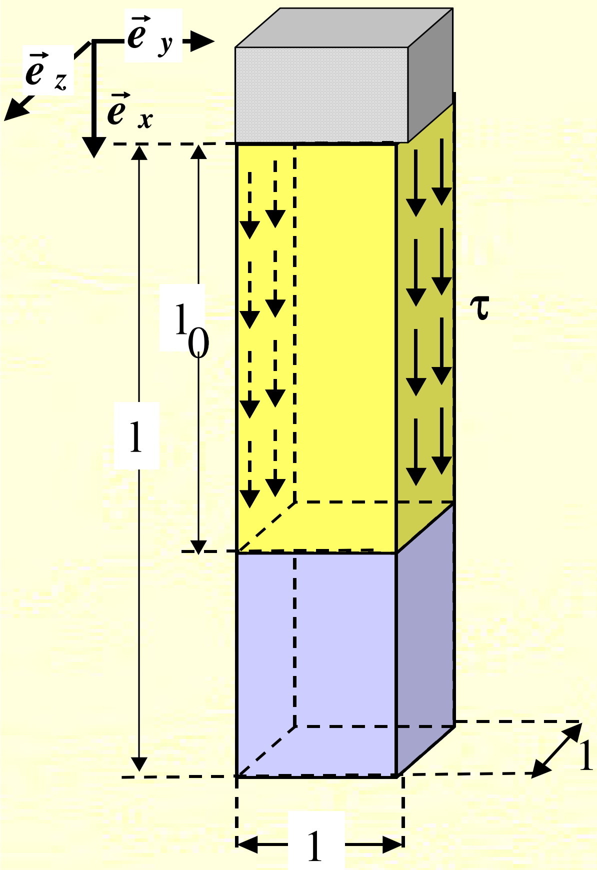
satisfait exactement par hypothèse

$$\underbrace{\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}+\left(\nabla\vec{u}\right)^T\right]\forall\vec{x}\in\Omega \\ \vec{u}=\vec{u}^{\,imposé}=\overline{\vec{u}} \;\; \forall\vec{x}\in S_U \end{cases}}_{\text{satisfait approximativement}}$$

satisfait **approximativement**

II. Equation des travaux virtuels

II.3. Principe des travaux virtuels des contraintes



$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_{xx} = -\begin{bmatrix} a+2by+3cy^2+4(-4b+16\tau)y^3 \\ -5(16a+4c)y^4 \end{bmatrix} x+b \\
\sigma_{xy} = ay+by^2+cy^3 \\
+(-4b+16\tau)y^4-(16a+4c)y^5 \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

$$\sigma_{xy}\left(y=\frac{1}{2}\right)=\sigma_{xy}\left(y=\frac{-1}{2}\right)=\tau$$

$$b = \frac{\tau\left(-5+7200-5\upsilon\right)}{(1100+\upsilon+316)}$$

III. Principe de minimum de l’énergie

III.1. Energie de déformation et énergie complémentaire

III.1.1. Energie de déformation

$$W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right):\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}:\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}\rightarrow\underline{\underline{\sigma}}=\frac{\partial W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$\delta W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=\frac{\partial W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}:\delta\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{\sigma}}:\delta\underline{\underline{\varepsilon}}$$

III.1.2. Energie complémentaire

$$W^{c}_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}:\underline{\underline{\sigma}}\rightarrow\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\partial W^{c}_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}$$

III. Principe de minimum de l'énergie
III.2. Principe de minimum de l'énergie de déformation

Principe des travaux virtuels des déplacements

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv - \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d\Omega = 0$$

Définition de l'énergie élastique en fonction des déformations

$$\delta W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{U = \int_{\Omega} W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}\right) dv - \int_{S_\sigma + S_U} \vec{\bar{t}}^{\,T} \vec{u}^{CA} d S_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \vec{u}^{CA} d\Omega}_{\delta U = 0 \text{ pour tout champ } \vec{u}^{CA}}$$

III. Principe de minimum de l'énergie
III.3. Principe de minimum de l'énergie complémentaire

Principe des travaux virtuels des contraintes

$$\int_\Omega \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dv - \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_\sigma = 0$$

Définition de l'énergie élastique complémentaire

$$W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{U^c = \int_\Omega W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS}_{\delta U = 0 \text{ pour tout champ } \underline{\underline{\sigma}}^{sA}}$$

III. Principe de minimum de l'énergie

III.3. Principe de minimum de l'énergie complémentaire

$$U = \int_{\Omega} W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) dv - \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^{\,T} \vec{u}^{CA} dS_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \vec{u}^{CA} d\Omega$$

$$U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}\right) \geq U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ex}\right)$$

$$U^c = \int_{\Omega} W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS$$

$$U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right) \leq U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{ex}\right)$$

III. Principe de minimum de l'énergie
III.4. Mesure de l'erreur

$$-U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ca}\right) \leq -U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ex}\right) = U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{ex}\right) \leq U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{sa}\right)$$

$$U = \int_{\Omega} W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) dv - \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^{T} \vec{u}^{CA} d S_\sigma$$

$$U^c = \int_{\Omega} W_{él}^{c}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^{T} \vec{u} d S$$