TD 1 : Déformations

>

Exercice 1

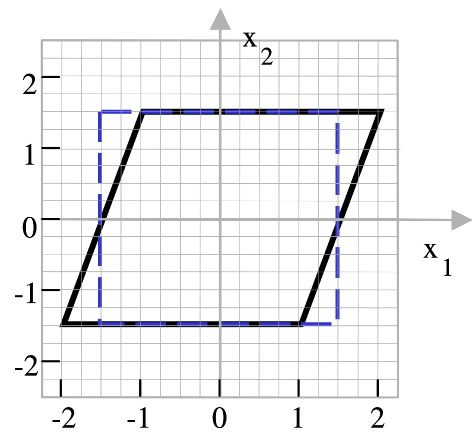


Figure 1 : disque soumis à glissement simple

Un disque plat est soumis à du glissement simple (Figure 1).

Calculer :

- le tenseur gradient de la transformation
- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- la dilatation selon les trois axes X_1, X_2
- l'angle entre les axes 1 et 2 après transformation
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- la déformation selon les trois axes
- le tenseur petites déformations

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_1 + X\\
x &= X\\
x &= X
\end{aligned}
$$

Tense r gr¢dient de ¢ tr¢nsfor ¢tion

$$
\underline{\underline{F}}(\vec{X},t) = \overrightarrow{grad}[\vec{\Phi}(\vec{X},t)] = \overrightarrow{grad}[\vec{x}(\vec{X},t)]
$$

$$
F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}
$$

$$
F := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Tense r des di ¢t¢tions de C¢ chy Green

$$
d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{X}^T \underline{\underline{C}}\; d\vec{X}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}
$$

$$
C := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Di ¢t¢tion d¢ns ne direction

$$
\lambda\left(d\vec{X}\right) = \lambda\left(\vec{t}_0\right) \begin{cases} = \sqrt{\vec{t}_0^{\,T}\, \underline{\underline{C}}\; \vec{t}_0} \\ = \dfrac{dl}{dl_0} \\ = \left\| \underline{\underline{F}}\; \vec{t}_0 \right\| \end{cases}
$$

$$\lambda_1 := 1 \qquad \lambda_2 := \frac{1}{3}\sqrt{10} \qquad \lambda_3 := 1$$

G isse ent de de directions orthogon¢ es

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{d\vec{x}^T d\vec{x}'}{\|d\vec{x}\|\|d\vec{x}'\|} = \frac{\vec{t}_0^T \underline{\underline{C}}\,\vec{t}_0'}{\lambda(\vec{t}_0)\lambda(\vec{t}_0')}}$$

t p 1 t p 1 t p
¢ ph¢ Ang e C t t p

$$\alpha := 71.56505115$$

déformation de Green-Lagrange

$$E := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ypoth se des petites pert r ¢tions

d p ¢ce ent en fonction des coordonn es

$$U := \left[\frac{1}{3}X_2,\ 0,\ 0\right]$$

tense r

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \overrightarrow{grad}\left[\vec{U}\left(\vec{X},t\right)\right] \quad soit \quad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}} \qquad \boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}}$$

$$H := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des petites déformations

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)}$$

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Différence entre E et ε

$$\delta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>

E¢ ercice D for ¢tion ni¢ i¢ e

Un solide est déformé en déformation uni-axiale. selon X_1. :

$$x_1 := X_1 (1 + \beta t)$$

où t correspond au temps et β est une constante arbitraire.

Calculer :

- le tenseur gradient de la transformation
- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- la dilatation selon les trois axes X_1, X_2
- l'angle entre les axes 1 et 2 après transformation
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- la déformation selon les trois axes
- le tenseur gradient des déplacements
- le tenseur petites déformations

Définition de la transformation

description de la transformation

$$x_1 := X_1 (1 + \beta t)$$

Tenseur gradient de la transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{F}}(\vec{X},t) = \overrightarrow{grad}[\vec{\Phi}(\vec{X},t)] = \overrightarrow{grad}[\vec{x}(\vec{X},t)] \\ F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{array}}$$

$$F := \begin{bmatrix} 1 + \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des dilatations de Gauchy-Green $\boxed{d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{X}^T \underline{\underline{C}}\ d\vec{X}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}}$

$$C := \begin{bmatrix} (1+\beta\, t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dilatation dans la direction des trois axes

$$\boxed{\lambda\left(d\vec{X}\right) = \lambda\left(\vec{t}_0\right) \begin{cases} = \sqrt{\vec{t}_0^{\,T}\, \underline{\underline{C}}\ \vec{t}_0} \\ = \dfrac{dl}{dl_0} \\ = \left\| \underline{\underline{F}}\ \vec{t}_0 \right\| \end{cases}}$$

$$\lambda_1 := \sqrt{(1+\beta\, t)^2}$$

$$\lambda_2 := 1$$

$$\lambda_3 := 1$$

angle entre deux directions

$$\alpha := 90.00000000$$

déformation de Green-Lagrange

$$E := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\beta t)^2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

déformation dans les trois axes

$$temp := \left[\frac{1}{2}(1+\beta t)^2 - \frac{1}{2}, 0, 0\right]$$

$$E11 := (1+\beta t)^2 - 1$$

$$temp := [0, 0, 0]$$

$$E22 := 0$$

Hypothèse des petites perturbations

$$U := [X_1 (1 + \beta t) - X_1, 0, 0]$$

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \overrightarrow{grad}\left[\vec{U}\left(\vec{X},t\right)\right] \quad soit \quad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}} \qquad \boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}}$$

$$H := \begin{bmatrix} \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des petites déformations

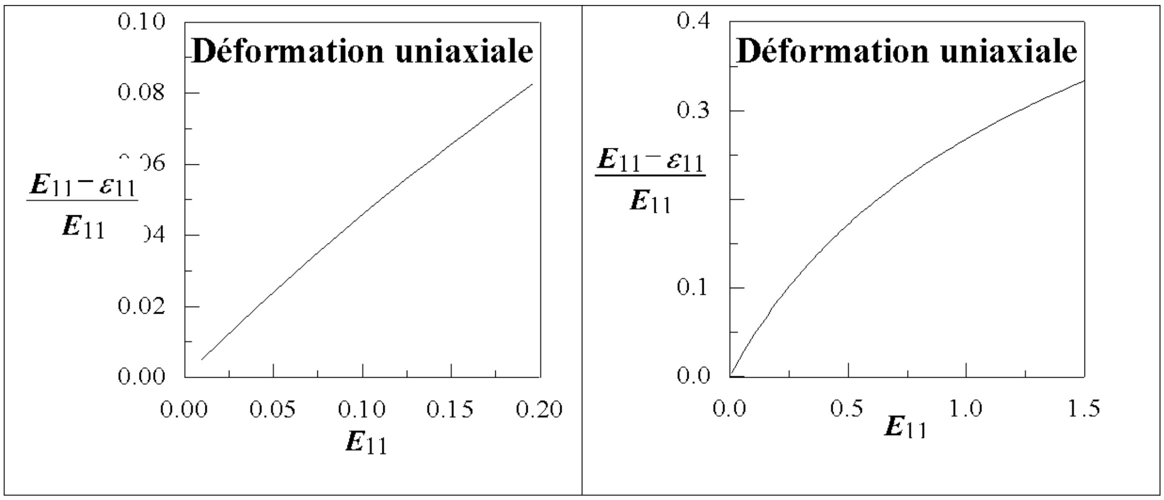
$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)}$$

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \beta^2 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$err := \frac{1}{2}\,\frac{\beta^2\,t^2}{\beta\,t + \frac{1}{2}\beta^2\,t^2}$$

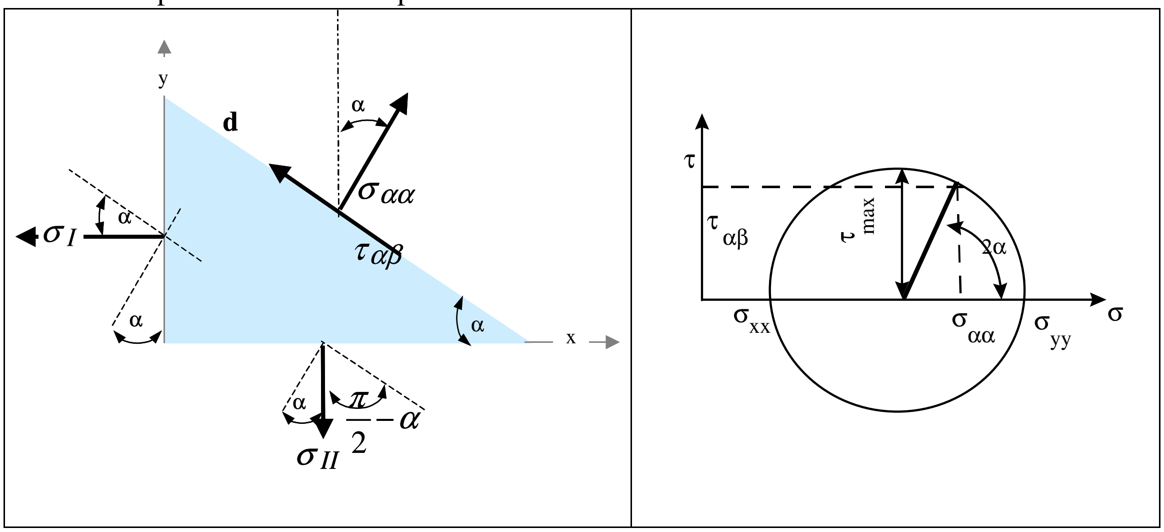
$$0$$



TD CONTRAINTE

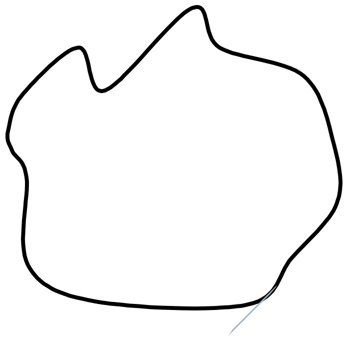
Exercice 1

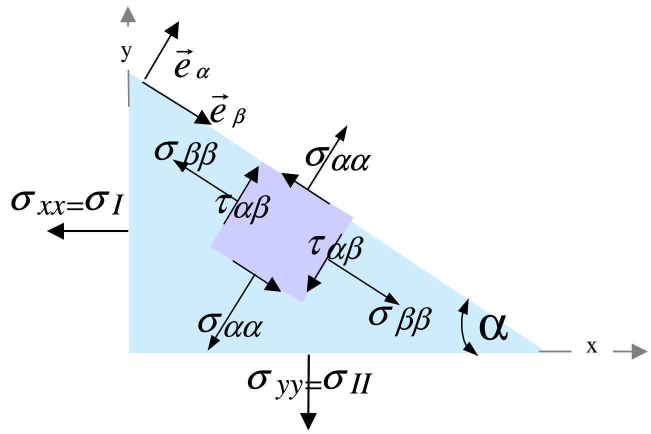
Mohr a montré la propriété intéressante suivante pour le tenseur des contraintes, ***indépendante du comportement du matériau et des conditions aux limites***. Considérons l'état de contraintes au point x du volume V. Considérons un état plan de contraintes ($\sigma_{zz}=\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0$). Dans l'espace des contraintes de traction σ et des contraintes de cisaillement τ, l'état de contrainte au point x décrit un cercle si l'on considère toutes les facettes possibles autour du point x.

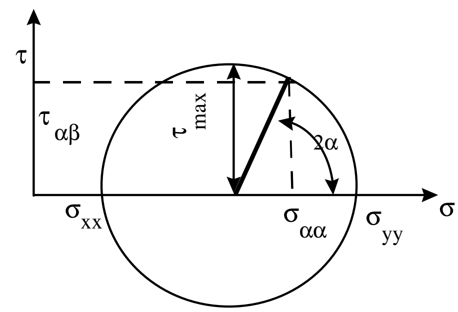


Démontrer que :

Si l'angle entre la facette considérée et l'axe des x est α dans l'espace physique réelle, l'état de contrainte sur cette facette sera représenté par le point faisant un angle 2α avec l'axe des σ dans l'espace (σ,τ).







Eq i i re s i ¢nt $\vec{e}_\alpha$

$$\sigma_{\alpha\alpha} ds - [\sigma_I \sin \alpha][dS \sin \alpha]\sigma_{\alpha\alpha} ds$$
$$-[\sigma_{II} \cos \alpha][dS \cos \alpha] =$$

Eq i i re s i ¢nt $\vec{e}_\beta$

$$\tau_{\alpha\beta} ds + [\sigma_I \cos \alpha][dS \sin \alpha]\sigma_{\alpha\alpha} ds$$
$$-[\sigma_{II} \sin \alpha][dS \cos \alpha] =$$

E i iner d

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_I \sin \alpha + \sigma_{II} \cos \alpha$$
$$\tau_{\alpha\beta} = (\sigma_{II} - \sigma_I) \sin \alpha \cos \alpha$$

E pri er to tes es q ¢ntit s en fonction de α

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_I\ \frac{1}{\ }-\frac{\cos\ \ \alpha}{\ }\ +\sigma_{II}\ \frac{1}{\ }+\frac{\cos\ \ \alpha}{\ }$$

$$\tau_{\alpha\beta}=\left(\sigma_{II}-\sigma_I\right)\frac{\sin\ \ \alpha}{\ }$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{\ }+\frac{\sigma_{II}-\sigma_I}{\ }\cos\ \ \alpha$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}-\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{\ }=\frac{\sigma_{II}-\sigma_I}{\ }\cos\ \ \alpha$$

$$\tau_{\alpha\beta}=\left(\sigma_{II}-\sigma_I\right)\frac{\sin\ \ \alpha}{\ }$$

Dans l'espace (σ,τ) c'est l'équation d'un cercle de centre ($\sigma_I+\sigma_{II}$,0) et de rayon $\sigma_{II}-\sigma_I$.

La contrainte de cisaillement maximale vaut

$\tau_{max}=(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2$.

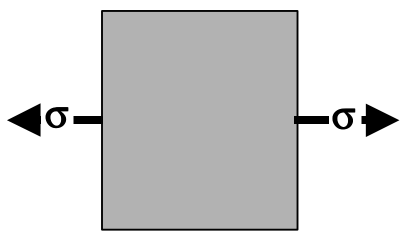
Exercice 2 :

a) Calculer la contrainte moyenne σ_m, le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}$ et la contrainte de von Mises $\overline{\sigma}$ en traction uniaxiale.

b) Calculer la contrainte moyenne σ_m, le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}$ et la contrainte de von Mises $\overline{\sigma}$ en traction biaxiale. Chercher la forme des courbes $\overline{\sigma} = constante$ dans le plan des contraintes principales σ_I et σ_{II}.

c) Dans l'espace des contraintes principales σ_I, σ_{II}.et σ_{III} chercher la forme de la surface $\overline{\sigma} = constante$.

r¢ction ni ¢ i¢ e



σ

$\underline{\underline{\sigma}} =$

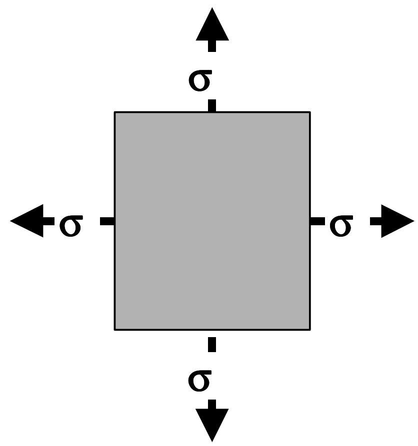
$\underline{\underline{s}} = \frac{\sigma}{\ } \quad -1$

-1

$\sigma_m = \frac{\sigma}{\ }$

$\overline{\sigma} = \sqrt{- \ \frac{\sigma}{\ } \left(\ +1 \ +1 \right)} = |\sigma|$

r¢ction i ¢ i¢ e



L¢ fig re ci dess s ontre n so ide en tr¢ction i¢ i¢ e
Le tense r contr¢inte s crit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{matrix} \sigma_I & \\ & \sigma_{II} \end{matrix}$$

L¢ contr¢inte oyenne et ¢ contr¢inte est donn e p¢r

$$\sigma_m = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{}$$

Le d i¢te r des contr¢intes est donn p¢r

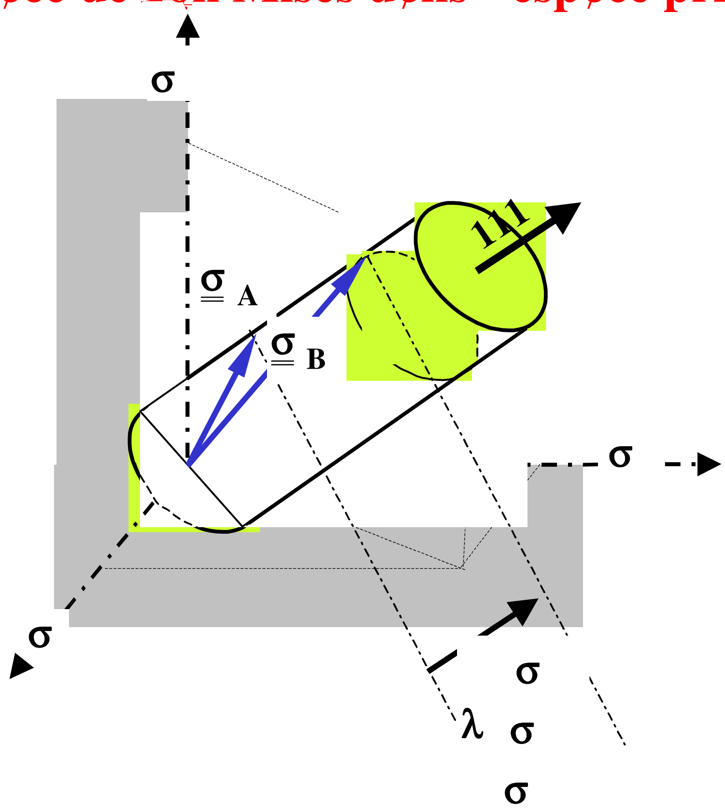
$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{} \begin{matrix} \sigma_I - \sigma_{II} & & \\ & \sigma_{II} - -\sigma_I & \\ & & -\sigma_I - \sigma_{II} \end{matrix}$$

L¢ contr¢inte de on Mises est donn e p¢r

$$\bar{\sigma} = \sqrt{-\ \frac{1}{}\ \ (\sigma_I - \sigma_{II}) + (-\sigma_I + \sigma_{II}) + (\sigma_I + \sigma_{II})}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_I + \sigma_{II} - \sigma_I \sigma_{II}}$$

rf¢ce de on Mises d¢ns esp¢ce princip¢



Représentation de la surface de von Mises dans l'état des contraintes principales.

D MA ER A X ELA Q E

M¢t ri¢ isotrope ¢stiq e in ¢ire

L nergie de d for ¢tion d n ¢t ri¢ ¢stiq e in¢ire s crit

$$\boxed{W_{vol}=\frac{1}{\ }\varepsilon_{ij}L_{ijkl}\varepsilon_{kl}}$$

o $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}$ sont respecti e ent e tense r des d for ¢tions et e tense r des rigidit s

¢ Montrer q e nergie de d for ¢tion ¢stiq e p¢r nit de o e o pe t se ettre so s ¢ for e s i ¢nte

$$\boxed{W_{vol}=\frac{1}{\ }\left(s_{ij}e_{ij}+\ \sigma_m\varepsilon_m\right)}$$

o $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{e}}$ sont respecti e ent e d i¢te r des contr¢intes et e tense r d i¢te r des d for ¢tions σ et ε sont respecti e ent ¢ contr¢inte oyenne et ¢ d for ¢tion oyenne

D ontrez es re ¢tions s i ¢ntes entre es d i¢te rs des contr¢intes et des d for ¢tions et entre ¢ contr¢inte oyenne et ¢ d for ¢tion oyenne

$$\boxed{\begin{array}{l} s_{ij}=\ Ge_{ij} \\ \sigma_m=\ \kappa\varepsilon_m \end{array}}$$

o $\kappa=\dfrac{E}{(1-\ \nu)}$ est ¢ co pressi i it c iq e

c Ecrire e tense r d q ¢tri e ordre L_i po r n ¢t ri¢ ¢stiq e isotrope in ¢ire oo e

d D ontrez q e

$$\mathbf{G \quad E \quad 1 \; \nu}$$

a) Démontrez $W_{vol} = \frac{1}{\ }\left(s_{ij}e_{ij} + \ \ \sigma_m\varepsilon_m\right)$

L nergie ¢stiq e p¢r nit de o e d for s crit

$$W_{vol} = \frac{1}{\ }\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\ }\left(s_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}\right)\left(e_{ij} + \varepsilon_m\delta_{ij}\right)$$

o δ_{ij} **est e sy o e de ronec er En e p icit¢nt es diff rents ter es on o tient**

$$W_{vol} = \frac{1}{\ }\ \ s_{ij}e_{ij} + \varepsilon_m \underbrace{s_{ij}\delta_{ij}}_{s_{11}+s\ \ +s\ \ =} + \sigma_m\delta_{ij}e_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij}$$

$s_i\ e_i$

s o tient si p e ent en so ¢nt s r es indices i et

$s_{ij}e_{ij}\ = s_{11}e_{11} + s\ \ e\ \ + s\ \ e$

$+ s_1\ e_1\ + s_1\ e_1\ + s\ \ e$

$+ s\ \ _1e\ \ _1 + s\ \ _1e\ \ _1 + s\ \ e$

$s_{ij}\delta_{ij}$

est ¢ tr¢ce d tense r d i¢te r des contr¢intes Ce ter e est n en effet

$s_{ij}\delta_{ij}\ = s_{11}\underbrace{\delta_{11}}_{1} + s\ \ \underbrace{\delta\ \ }_{1} + s\ \ \underbrace{\delta\ \ }_{1} +$

$\underbrace{s_1\ \delta_1\ + s_1\ \delta_1\ + s\ \ \delta\ \ }$ $+$

$\underbrace{s\ \ _1\delta\ \ _1 + s\ \ _1\delta\ \ _1 + s\ \ \delta\ \ }$

$s_{ij}\delta_{ij}\ = s_{11} + s\ \ + s\ \ =$

$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij}\ \ =\ \ \sigma_m\varepsilon_m$

$$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij} = \sigma_m\varepsilon_m \begin{array}{l} \delta_{11}\underbrace{\delta_{11}}_{1}+\delta \quad \underbrace{\delta \quad}_{1}+\delta \quad \underbrace{\delta \quad}_{1}+\underbrace{\delta_1 \ \delta_1 \ +\delta_1 \ \delta_1 \ +\delta \quad \delta \quad} \\ +\underbrace{\delta \ _1\delta \ _1+\delta \ _1\delta \ _1+\delta \quad \delta \quad} \end{array}$$

$$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij} = \sigma_m\varepsilon_m$$

L nergie ¢stiq e s crit fin¢ e ent

$$W_{vol} = \frac{1}{\ }\left(s_{ij}e_{ij} + \quad \sigma_m\varepsilon_m\right)$$ **c q f d**

b) Démontrez que $s_{ij} = Ge_{ij}$ *et* $\sigma_m = \kappa\varepsilon_m$

1) $\sigma_m = \kappa\varepsilon_{kk}$ $\kappa = \dfrac{E}{(1- \ \nu)}$

$$\sigma_{11} = G \ \ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1- \ \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \ \ + \varepsilon \ \ ) \ = \ G \ \ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1- \ \nu}\varepsilon_m$$

$$\sigma \ \ = G \ \ \varepsilon \ \ + \frac{\nu}{1- \ \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \ \ + \varepsilon \ \ ) \ = \ G \ \ \varepsilon \ \ + \frac{\nu}{1- \ \nu}\varepsilon_m$$

$$\sigma \ \ = G \ \ \varepsilon \ \ + \frac{\nu}{1- \ \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \ \ + \varepsilon \ \ ) \ = \ G \ \ \varepsilon \ \ + \frac{\nu}{1- \ \nu}\varepsilon_m$$

o ons es trois re ¢tions pr c dentes

$$\sigma_{11} + \sigma \ \ + \sigma \ \ = G \ \ \varepsilon_{11} + \varepsilon \ \ + \varepsilon \ \ + \frac{\nu}{1- \ \nu}\varepsilon_m \ = \ \underbrace{G}_{\frac{E}{1+\nu}} \ \ 1 + \frac{\nu}{1- \ \nu} \ \ \varepsilon_m$$

$$\underbrace{\sigma_{11} + \sigma \ \ + \sigma \ \ }_{\sigma_m} = \ \frac{E}{\underbrace{1+\nu}_{G}} \ \frac{1+\nu}{1- \ \nu} \ \ \varepsilon_m$$

$$\sigma_m = \ \frac{E}{(1- \ \nu)} \ \varepsilon_m = \ \kappa\varepsilon_m \ \kappa = E \ \{ \ (1- \ \nu)\}$$

2) $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \; Ge_{ij}$

Remplaçons ε_{11} par $e_{11} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}$

$$\sigma_{11} = 2G \;\; \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) \;\; \Leftrightarrow \sigma_{11} = 2G \;\; e_{11} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{11} = 2G\, e_{11} + 2G \;\; \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \;\;\; 1 + \frac{3\nu}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{11} = 2G\, e_{11} + \frac{E}{(1+2\nu)} \;\; \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \;\;\; \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{11} = 2Ge_{11} + \underbrace{\underbrace{\frac{E}{3(1-2\nu)}}_{\kappa} \varepsilon_{kk}}_{\sigma_m}$$

$$s_{11} = \sigma_{11} - \sigma_m = \; Ge_{11}$$

c) Ecrire L_{ijkl} pour un matériau élastique linéaire isotrope

$$\sigma_{11} = G \quad \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \quad + \varepsilon \quad) = G \quad \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\varepsilon_m$$

$$\sigma \quad = G \quad \varepsilon \quad + \frac{\nu}{1- \quad \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \quad + \varepsilon \quad) = G \quad \varepsilon \quad + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\varepsilon_m$$

$$\sigma \quad = G \quad \varepsilon \quad + \frac{\nu}{1- \quad \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon \quad + \varepsilon \quad) = G \quad \varepsilon \quad + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\varepsilon_m$$

$$\sigma_1 = G\varepsilon_1 \quad \sigma_1 = G\varepsilon_1 \quad \sigma \quad = G\varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = G \quad \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\left(\varepsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)$$

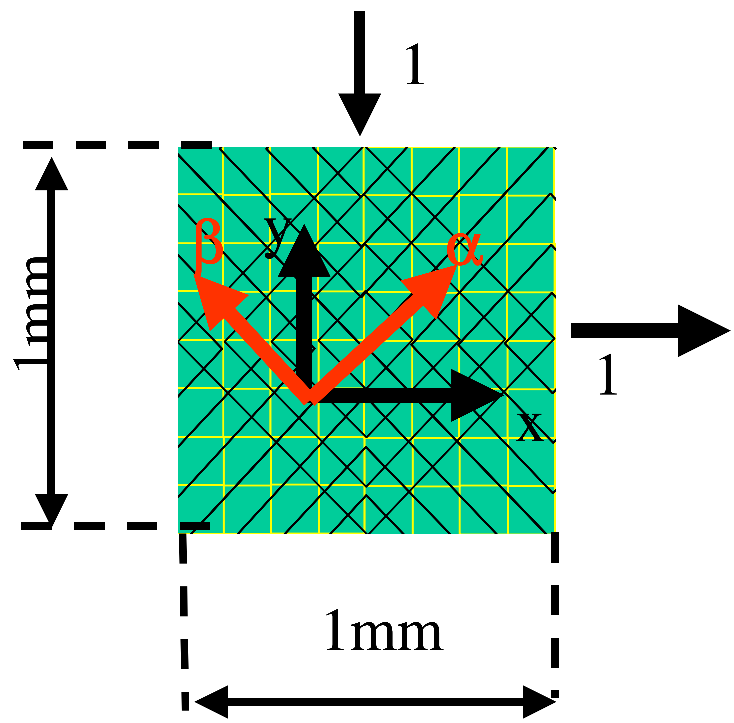
$$\sigma_{ij} = G \quad \varepsilon_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\left(\varepsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)$$

$$\sigma_{ij} = G \quad \delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right) \quad \varepsilon_{kl}$$

$$L_{ijkl} = Gsym \quad \delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right) \quad \varepsilon_{kl}$$

$$L_{ijkl} = G \quad \frac{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}}{} + \frac{\nu}{1- \quad \nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right) \quad \varepsilon_{kl}$$

d) Démontrez que G= E/[2(1+ν)].



Indication

On considère un disque en contraintes planes. σ_{11}=1 et σ_{22}=-1.

1) ***On calcul le tenseur des contraintes dans le repère {α,β,z} par rotation à partir de l'expression du tenseur des contraintes dans le repère {x,y,z}. Le tenseur des déformations dans le repère {α,β,z} est obtenu par la loi de Hooke.***
2) ***On calcul le tenseur des contraintes dans le repère {x,y,z} et le tenseur des déformation par la loi de Hooke dans le même repère. Le tenseur de déformation dans le repère {α,β,z} est obtenu par rotation.***
3) ***On compare les deux expressions du tenseur des déformations et on en déduit l'égalité à démontrer.***

1) Rotation du tenseur des contraintes et calcul des déformations dans le nouveau repère

Tense r des contr¢intes et tense r des d for ¢tions d¢ns es ¢ es $\{x,y,z\}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{x\ y\ z\}} = \quad 1 \quad -1$$

For es de p¢ss¢ge

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \vec{e}_\alpha^{\,T}\ \underline{\underline{\sigma}}_{\{x\ y\ z\}}\ \vec{e}_\alpha \quad \sigma_{\beta\beta} = \vec{e}_\beta^{\,T}\ \underline{\underline{\sigma}}_{\{x\ y\ z\}}\ \vec{e}_\beta$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha^{\,T}\ \underline{\underline{\sigma}}_{\{x\ y\ z\}}\ \vec{e}_\beta$$

E pression des ecte rs de ¢ no e e ¢se en fonction d¢ns ¢ ¢se initi¢ e

$$\vec{e}_\alpha^{\,T} = \frac{\sqrt{\ }}{\ } \quad \frac{\sqrt{\ }}{\ } \qquad \vec{e}_\beta^{\,T} = -\frac{\sqrt{\ }}{\ } \quad \frac{\sqrt{\ }}{\ }$$

Rot¢tion d tense r contr¢intes

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} =$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{\ }}{\ } \quad \frac{\sqrt{\ }}{\ } \quad 1 \quad -1 \quad -\sqrt{\ } \quad \sqrt{\ } \quad \sqrt{\ } \quad = -1$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{\alpha\ \beta\ z\}} = \quad -1 \quad -1$$

C¢ c de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ p¢rtir de $\underline{\underline{\sigma}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ p¢r ¢ oi de oo e

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{G} = \frac{-1}{G} \text{donc}$$

$$-1$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha\ \beta\ z\}} = \frac{1}{G} \quad -1 \qquad\qquad 1$$

2) Calcul des déformations dans l'ancien repère et rotation

C¢ c de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x,y,z\}}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma\quad) = \frac{1}{E}(1+\nu) \qquad \underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x\ y\ z\}} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \quad \begin{matrix} 1 \\ & -1 \end{matrix}$$

$$\varepsilon\quad = \frac{1}{E}(\sigma\quad - \nu\sigma_{11}) = \frac{-1}{E}(1+\nu)$$

C¢ c $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ p¢r rot¢tion de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x,y,z\}}$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} =$$

$$\varepsilon_{\beta\beta} =$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha}^{\,T} \frac{(1+\upsilon)}{E} \begin{matrix} 1 \\ & -1 \end{matrix} \qquad \vec{e}_{\beta} = -\frac{(1+\upsilon)}{E}$$

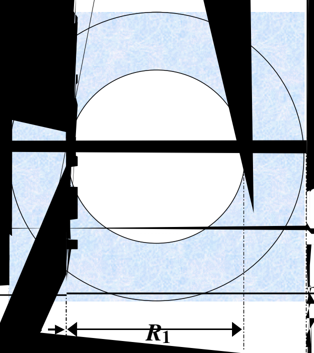
$$-1$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha\ \beta\ z\}} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \quad -1$$

Co p¢r¢ison des de e pressions de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$

$$G \quad E \quad 1\ \nu$$

$$\sigma_1 = G\varepsilon_1 \quad \sigma_1 = G\varepsilon_1 \quad \sigma = G\varepsilon$$



3)

4)

σ_{r}

5) Compa

l'approxim

o tion co p te

1 Eq ¢tion de N¢ ier

- **C¢s g n r¢**

Le point de d p¢rt est q ¢tion de N¢ ier

$$\boxed{\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-\ \nu}\overrightarrow{grad}\ \ div\left(\vec{u}\right)\ \ + \frac{\vec{f}}{G} =}$$

Nous nous efforçons de faire un maximum de calculs formels afin d'éviter les calculs en coordonnées cylindriques.

- ***Simplification de l'équation de Navier pour des forces de volumes nulles***

$$\Delta\vec{u} = \overrightarrow{grad}\ \ div\left(\vec{u}\right)\ \ -\overrightarrow{rot}\ \ \overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)$$

Po r des forces de o e n es

$$\frac{1-\nu}{1-\ \ \nu}\overrightarrow{grad}\ \ div\left(\vec{u}\right)\ \ -\overrightarrow{rot}\ \ \overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)\ \ =$$

- ***Simplification de l'équation de Navier par les conditions de symétrie***

Le ch¢ p de d p ¢ce ent est p re ent r¢di¢

$\vec{u} = u_r\vec{e}_r$

$\overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right) = \ \ si\ \vec{u} = u_r\vec{e}_r$ **¢insi q ¢tion de N¢ ier donne**

$$\frac{1-\nu}{1-\ \ \nu}\overrightarrow{grad}\ \ div\left(\vec{u}\right)\ \ =\ \ \ \rightarrow div\left(\vec{u}\right) = cons\,t¢nte$$

$$\overrightarrow{grad}\ \ div\left(\vec{u}\right)\ \ =\ \ \ \rightarrow div\left(\vec{u}\right) = cons\,t¢nte$$

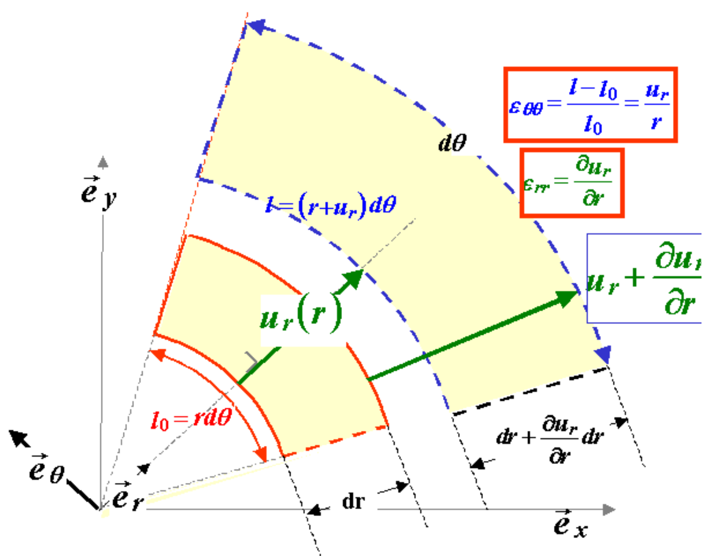
o tion de $div(\vec{u}) = cons$ t¢nte

Ę pression de $div(\vec{u})$ en fonction des d for ¢tions

$$div(\vec{u}) = trace(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$$

I.2.1. Calcul de ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$ par des considérations géométriques



o tion de $div\left(\vec{u}\right) = cons$ t¢nte

$$div\left(\vec{u}\right) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = C$$

o tion de q ¢tion ho og ne $\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} =$

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = \quad \rightarrow \frac{du_r}{u_r} = -\frac{dr}{r}$$

$$u_r = A \quad r$$

o tion p¢rtic i re de q ¢tion $\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = c$

$$u_r = \frac{c}{} r$$

o tion co p te de q ¢tion $\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = c$

$$u_r = \frac{A}{r} + \frac{c}{} r$$

C¢ c des d for ¢tions et des contr¢intes

C¢ c des d for ¢tions

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = -\frac{A}{r} + \frac{c}{}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{A}{r} + \frac{c}{}$$

C¢ c des contr¢intes

$$\sigma_{rr} = \quad G \quad \varepsilon_{rr} + \frac{\upsilon}{(1- \quad \upsilon)}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{rr} = \quad G \quad -\frac{A}{r} + \frac{c}{} + \frac{\upsilon}{(1- \quad \upsilon)} C$$

Consid r¢tions des conditions ¢ i ites et c¢ c des const¢ntes

rf¢ce interne d t e

$$\sigma_{rr} \; R_1 \; = \; G \; -\frac{A}{R_1} + \frac{c}{(1- \;\; \upsilon)} \;\; = -p$$

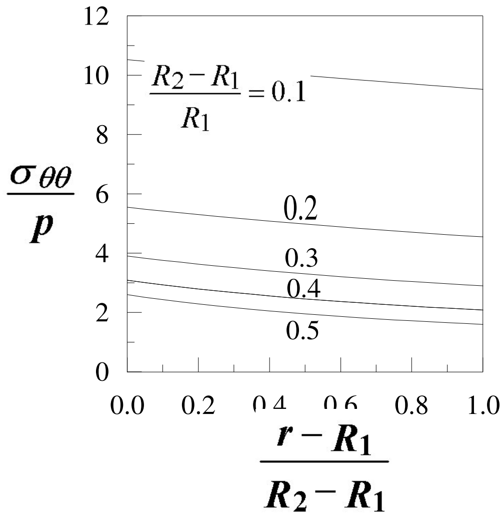
rf¢ce e terne d t e

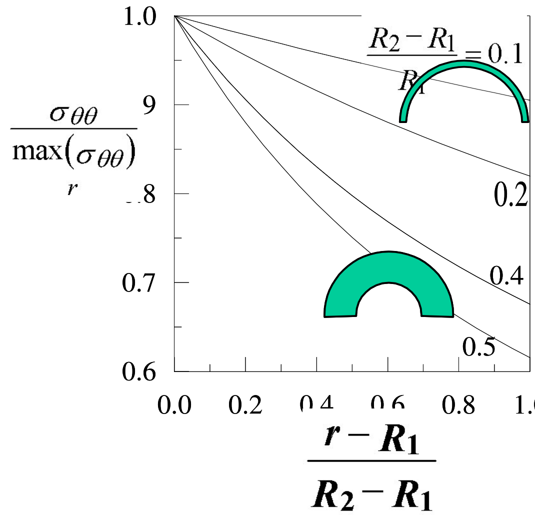
$$\sigma_{rr} \; R \;\; = \; G \; -\frac{A}{R} + \frac{c}{(1- \;\; \upsilon)} \;\; =$$

$$A \;\; \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \;\; = \frac{p}{G} \rightarrow A = \frac{R_1 R \;\; p}{G\left(R_1 - R \;\;\right)\left(R_1 - R \;\;\right)}$$

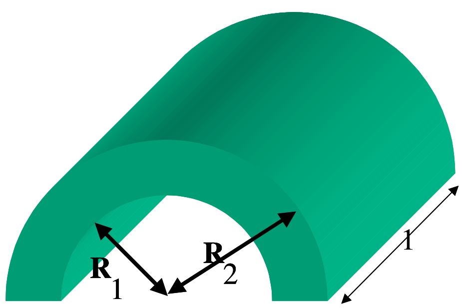
$$\frac{c\,R_1}{(1- \;\; \upsilon)} = \frac{-p\,R_1}{G}$$

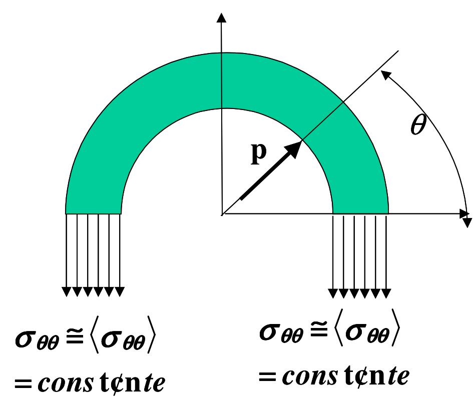
$$\sigma_{\theta\theta} = \;\; G \;\; \frac{A}{r} + \frac{1}{(1- \;\; \upsilon)}\frac{c}{\;}$$





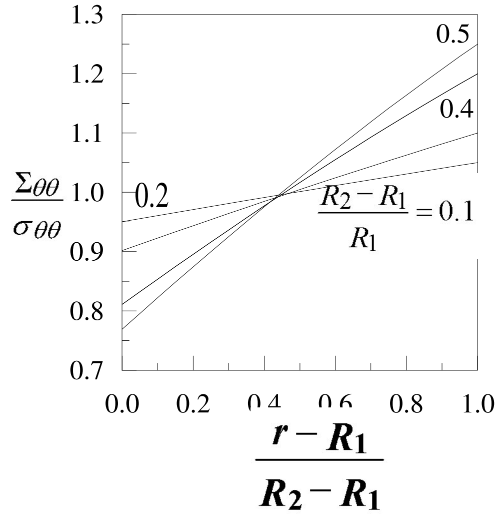
o tion po r des petites p¢isse rs





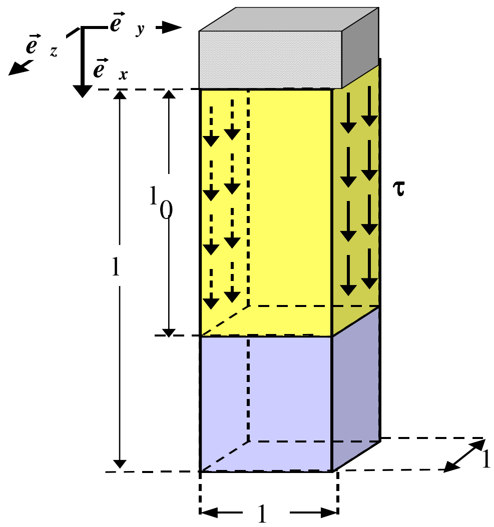
$$\sigma_{\theta\theta}\left(R - R_1\right) = {}^{\pi} \quad p \sin\theta \;\; R_1 d\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR_1}{(R\ -R_1)}$$



TD METHODE ENERGETIQUE

Considérons une barre encastrée soumise à des sollicitations en cisaillement sur deux faces (figure ci contre). On néglige la gravité et les forces de volume $\vec{f}$ sont nulles. On se propose de déterminer le champ de déplacement dans la barre.



On considère un champ de déplacement dépendant de 3 paramètres.

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$

Calculez les valeurs de a_1, a_2 et a_3 par application du principe des travaux virtuels des déplacements.

$$\boxed{\int_{\Omega} \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\; dv = \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\; dS_\sigma}.$$

Solution

$$\underset{\Omega}{}\;\underline{\underline{\sigma}}\quad \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \underset{S_\sigma}{}\;\vec{\bar{t}}^{\,T}\,\delta\vec{u}^{CA} d\,S_\sigma + \underset{\Omega}{}\;\vec{f}^{\,T}\,\delta u^{CA} d\Omega$$

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{\ }\quad \nabla\left(\delta u^{CA}\right) \;+\; \nabla\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)^{\,T}$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \; \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv$$

$$\left(a_1 l \;\; + a \;\; l \;\; + a \;\; l \;\; \right)(\delta a_1)$$

$$= E \;\; + \;\; a_1 l \;\; + - a \;\; l \;\; + - a \;\; l \;\; \left(\delta a \;\; \right)$$

$$+ \;\; a_1 l \;\; + - a \;\; l \;\; + - a \;\; l \;\; \left(\delta a \;\; \right)$$

Le chargement imposé t

est indépendant du choix du champ de déplacment, l'intégrale de surface s'écrit donc

$$\int_{S_\sigma} \vec{\vec{t}}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d\,S_\sigma = \tau \int_{S_\sigma} (\delta a_1) x + (\delta a \;\;) x \;\; + (\delta a \;\;) x \;\; d\,S_\sigma$$

soit

$$\int_{S_\sigma} \vec{\vec{t}}^{\,T} \delta \vec{u}^{CA} d\,S_\sigma = \tau \;\; (\delta a_1) \frac{l}{\;} + (\delta a \;\;) \frac{l}{\;} + (\delta a \;\;) \frac{l}{\;}$$

le principe des travaux virtuels

conduit aux système d'équations suivant :

$$\left(a_1 l \;\; + a \;\; l \;\; + a \;\; l \;\; \right)(\delta a_1)$$

$$E \;\; + \;\; a_1 l \;\; + - a \;\; l \;\; + - a \;\; l \;\; \left(\delta a \;\; \right)$$

$$+ \;\; a_1 l \;\; + - a \;\; l \;\; + - a \;\; l \;\; \left(\delta a \;\; \right)$$

$$= \tau \;\; (\delta a_1) \frac{l}{\;} + (\delta a \;\;) \frac{l}{\;} + (\delta a \;\;) \frac{l}{\;}$$

$$\forall \delta a_1 \;\; \delta a \;\; \delta a$$

Ce système doit être satisfait pour toutes valeurs des variations des amplitudes δa_1, δa_2 *et* δa_3. *Nous choisissons trois vecteurs particuliers* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [1,0,0]$, $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,1,0]$ *et* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,0,1]$ *pour les variations des amplitudes. Ceci conduit au système d'équations suivant pour les amplitudes* a_i.

$$\begin{aligned}
[\delta a_1\ \delta a\ \ \delta a\ ] &= [1\ \ \ \ ] \rightarrow a_1 l + a\ l + a\ l = \tau l \quad E \\
[\delta a_1\ \delta a\ \ \delta a\ ] &= [\ \ 1\ \ ] \rightarrow a_1 l + a\ l \quad + a\ l \quad = \tau l \quad E \\
[\delta a_1\ \delta a\ \ \delta a\ ] &= [\ \ \ \ 1] \rightarrow a_1 l + a\ l \quad + a\ l \quad = \tau l \quad E
\end{aligned}$$

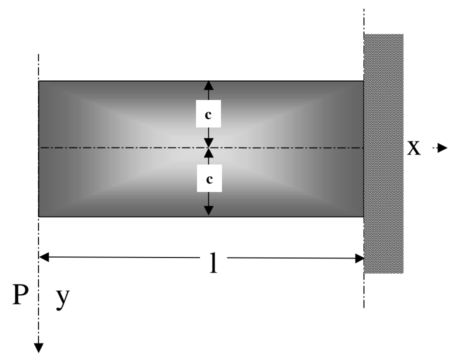
La solution du système précédent est immédiate et conduit à :

$$a_1\ a\ \ a \quad = \frac{l\ \tau}{E} \quad - \frac{\tau}{E}$$

TD6 : Elasticité plane

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchie par une force P appliquée à son extrémité libre (figure). Démontrez que les contraintes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -\frac{3}{2}\frac{P}{\Omega}\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)$$



où I est le moment d'inertie de la section droite et Ω est sa section.

Rappel

Equations d'élasticité plane

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Fonctions d'Airy polynômiales

$$\varphi_2(x,y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{matrix} = \begin{matrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{matrix}$$

$$\varphi_3(x,y) = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3$$

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{matrix} = \begin{matrix} 2c_3 x + 6d_3 y & -2b_3 x - 2c_3 y \\ -2b_3 x - 2c_3 y & 6a_3 x + 2b_3 y \end{matrix}$$

Solution

Choisir pour la fonction d'Airy l'expression

$$\varphi \;\; x \;\; y \;\; = b \;\; xy + \frac{d \;\; x \, y}{}$$

On obtient l'expression suivante pour les contraintes

$$\sigma_{xx} = d \;\; xy \; \sigma_{yy} = \quad \sigma_{xy} = -b \;\; + \frac{d \;\; y}{}$$

Pour rendre les côtés longitudinaux libres de toute force on doit avoir

$$\sigma_{xy}\}_{y=+\ -c} = -b\ + \frac{d\ c}{} =$$

$$P = \int_{-c}^{c} \sigma_{xy}\}_{x=l} dy = \int_{-c}^{c} \quad b\ + \frac{b\ y}{c}\ dy \rightarrow b\ = \frac{P}{c}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{c} \sigma_{yy} = \quad \sigma_{xy} = -\frac{P}{c}\ 1 - \ \frac{y}{c}$$

Si l'on note que $2c^3/3$ *est le moment d'inertie de la section droite et que 2c est sa section W, on peut encore écrire les formules précédentes sous la forme :*

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \sigma_{yy} = \quad \sigma_{xy} = -\frac{P}{\Omega}\ 1 - \ \frac{y}{c}$$