6.9 Fluage d'une poutre en flexion sur appuis simples (Sujet d'examen 2013)

Aucun document autorisé, ni calculatrice.
Durée de l'examen : une heure.
Recueil de formules mathématiques en annexe.

6.9.1 Evaluation de connaissances

Cette partie n'est pas calculatoire.

Question 1.1 : Par quels phénomènes mécaniques l'élasticité linéaire de matériaux peut-elle prendre fin, en considérant des sollicitations croissantes ?
Réponse : L'élasticité linéaire peut prendre fin avec l'hyperrélasticité en transformations finies, la plasticité, la viscoplasticité ; pour une structure, avec l'instabilité par flambage qui rompt la relation linéaire entre effort et déplacements, ou aussi avec la rupture.

Question 1.2 : Selon la théorie linéaire de la mécanique de la rupture, l'énergie de déformation d'un volume entourant la pointe d'une fissure est-elle à valeur finie ?
Réponse : Oui, car $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\, r\, dr\, d\theta$ est à valeur finie.

Question 1.3 : Un homme grimpe le long d'une tige élastique d'une longueur indéterminée et parfaitement verticale. La tige est solidement encrastrée dans le sol. L'homme a une parfaite maîtrise de ses mouvements, si bien que la tige n'est soumise qu'à une sollicitation de compression. L'homme grimpe. Doit-on l'arrêter ? Y a-t-il un risque lorsqu'il monte ? Pour quelle raison mécanique propre à la tige y aurait-il un risque ?
Réponse : Il faut au moins l'avertir du risque de flambage de la tige, si l'homme monte trop haut. En effet la charge critique de flambage décroit lorsque la longueur sollicitée en compression augmente.

6.9.2 Exercice, étude du fluage non linéaire d'une poutre

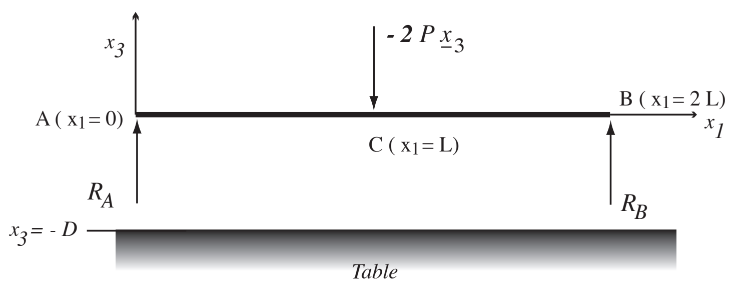

FIGURE 6.4 – Fluage d'une poutre à section rectangulaire, de longueur $2L$, en appui simple en A et B et soumise à une charge ponctuelle $-2P\underline{x}_3$ en son centre C.

Nous souhaitons identifier une constante de fluage en observant la flexion d'une poutre sous l'effet d'une charge ponctuelle. La hauteur de la poutre, dans le plan $(x_1,\ x_3)$, est notée h, sa largeur est notée b. L'aire de la section est $S = bh$, son moment quadratique par rapport à l'axe x_2 est $I = b\frac{h^3}{12}$. Les deux appuis permettent, à l'instant initial $t = 0$, de poser la poutre à une distance D d'une table, comme indiqué sur la Figure 1. Du fait du fluage du matériau constitutif de la poutre, un contact entre la poutre et la table se réalise à l'instant t_f.

Pour des sollicitations en traction pure dans la direction 1, la loi de fluage relie le taux de déformation longitudinal $\dot{\varepsilon}_{11}$ à la contrainte longitudinale σ_{11} par la loi de Norton ci-dessous :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = s\left(\frac{|\sigma_{11}|}{K}\right)^n$$

où K et $n \geq 1$ sont deux param/'etres matériau, et s est le signe de σ_{11}. Cette loi de comportement n'est pas élastique, si bien que les équations de comportement du formulaire relatives à l'élasticité ne sont pas applicables. Dans le cadre de cet exercice, on supposera que les déformations de cisaillement sont négligeables ($\varepsilon_{13} = 0$). On utilisera donc une théorie des poutres de Navier-Bernoulli. Les déformations sont supposées infinitésimales.

QUESTIONS :

Question 2.1 : Donner l'expression des réactions aux appuis R_A et R_B en fonction de P et L le cas échéant.
Réponse : Du fait de la symétrie du problème on a : $R_A = R_B$. Or l'équilibre en résultante donne $R_A + R_B - 2\,P = 0$ donc $R_A = R_B = P$.

Question 2.2 : Donner l'expression des composantes N, T et M, du torseur des efforts intérieurs en $x_1 = 0$ et $x_1 = 2L$.
Réponse : A droite, la normale extérieure à la matière est $\underline{x}_1$ donc $T(2L) = R_B = P$, et $N(2L) = 0$ $M(2L) = 0$ (la rotation de la section droite est libre). A gauche, la normale extérieure à la matière est $-\underline{x}_1$ donc $T(0) = -R_A = -P$, et $N(0) = 0$ $M(0) = 0$.

Question 2.3 : Donner l'expression des conditions aux limites sur les déplacements et la rotation des sections droites le cas échéant.
Réponse : Les appuis simples donne comme conditions $V(0) = 0$ et $V(2L) = 0$

Question 2.4 : Quelle équation peut-on écrire sur $\theta(L)$?
Réponse : Du fait de la symétrie du problème, le déplacement longitudinal est symétrique en tout point de la section droite en $x = L$. On en déduit que $U(L) = 0$ et que $\theta(L) = 0$.

Question 2.5 : Déterminer l'expression du champ des efforts T et N sur l'intervalle $[0, L]$.
Réponse : Il faut exploiter l'équation d'équilibre pour déterminer les grandeurs statiques. Ces équations ne dépendent pas de la loi de comportement.

$$N,1 = 0\,\forall x_1 \in [0, L[\,, \quad N(0) = 0 \Rightarrow N(x_1) = 0\,\forall x_1 \in [0, L[$$

$$T,1 = 0\,\forall x_1 \in [0, L[\,, \quad T(0) = -P \Rightarrow T(x_1) = -P\,\forall x_1 \in [0, L[$$

Question 2.6 : Donner l'expression du moment fléchissant M sur l'intervalle $[0, L]$.
Réponse : L'équilibre donne :

$$M,1 - T = 0\,\forall x_1 \in [0, L[\,, \quad M(0) = 0 \Rightarrow M(x_1) = -P\,x_1\,\forall x_1 \in [0, L[$$

Question 2.7 : Pour la suite de l'exercice, les déformations étant infinitésimales, le déplacement longitudinal U est nul en tout point. Donner le lien entre la vitesse de rotation des sections droites $\dot{\theta}$ et $\dot{\varepsilon}_{11}$, en supposant qu'une section plane reste plane, conformément à la théorie des poutres.
Réponse :

$$\varepsilon_{11} = U_{,1} + \theta_{,1}\,x_3,\ U = 0 \quad \forall t\ (x_3 \text{ mesuré dans la configuration initiale})$$

En dérivant par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\theta}_{,1}\,x_3$$

Notons que s est aussi le signe de $\dot{\theta}_{,1}$.

Question 2.8 : Quelle est la forme du champ de contrainte σ_{11} dans la hauteur de la poutre ? On admettra que le signe du produit $x_3\,\sigma_{11}$ est constant pour tout x_3 dans l'intervalle $[-h/2,\ h/2]$. Retrouve-t-on une dépendance linéaire en x_3 pour $n = 1$?
Réponse : La loi de comportement donne la relation suivante :

$$|\sigma_{11}| = K(s\,\dot{\theta}_{,1}\,x_3)^{1/n}$$

. On en déduit :

$$\sigma_{11} = \mu K\,(|\dot{\theta}_{,1}|)^{1/n}\,x_3^{1/n}, \forall x_3 \geq 0$$
$$\sigma_{11} = -\mu K\,(|\dot{\theta}_{,1}|)^{1/n}\,(-x_3)^{1/n}, \forall x_3 < 0$$

avec $\mu = s$.

Question 2.9 : Donner la relation de comportement global reliant le moment fléchissant M à la vitesse de rotation des sections droites. Pour la suite on introduira le pseudo moment d'inertie noté I_n, tel que : $I_n = 2\,b\,\frac{n}{1+2\,n}\,\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1+2n}{n}}$.
Réponse : La relation suivante est issue du principe des travaux virtuels : $M = b\int_{-h/2}^{h/2} x_3\,\sigma_{11}\,dx_3$. $x_3\sigma_{11}$ étant une fonction impaire de x_3, on obtient :

$$M = s\,2\,b\,K\,(|\dot{\theta}_{,1}|)^{1/n}\,\int_0^{h/2} x_3^{1/n+1}\,dx_3$$

Or : $\int_0^{h/2} x_3^{1/n+1}\,dx_3 = \frac{n}{1+2\,n}\,\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1+2n}{n}}$. Donc :

$$M = s\,I_n\,K\,(|\dot{\theta}_{,1}|)^{1/n}$$

et $\sigma_{11} = \frac{M}{I_n}\,x_3^{1/n}$.

Question 2.10 : Dans le cas $n = 1$, donner l'expression du déplacement transverse V en fonction du temps, pour tout point de l'intervalle $[0, L]$.
Réponse : L'équilibre et la loi de comportement donnent la relation suivante :

$$s\,I_n\,K\,(|\dot{\theta}_{,1}|)^{1/n} = -P\,x_1, \quad x_1 \in [0, L[$$

Donc s est opposé au signe de P ($s\,|P| = -P$). De plus :

$$\dot{\theta}_{,1} = s\,(\frac{|P|\,x_1}{I_n\,K})^n, \quad x_1 \in [0, L[$$

On en déduit par intégration en tenant compte des conditions aux limites :

$$\dot{\theta} = s\left(\frac{|P|}{I_n\,K}\right)^n \frac{1}{n+1}(x_1^{n+1} - L^{n+1})$$

$$\dot{V} = s\left(\frac{|P|}{I_n\,K}\right)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}(x_1^{n+2} - (n+2)L^{n+1}\,x_1)$$

$$V = s\,t\left(\frac{|P|}{I_n\,K}\right)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}(x_1^{n+2} - (n+2)L^{n+1}\,x_1)$$

Pour $n = 1$ on a :

$$V = s\,t\,(\frac{|P|}{I\,K})\,\frac{1}{6}(x_1^3 - 3\,L^2\,x_1)$$

$$V(L) = -t\,(\frac{P}{3\,I\,K})\,L^3$$

Question 2.11 : Dans le cas $n = 1$, montrer que la mesure de l'instant t_f auquel la poutre entre en contact avec la table permet d'identifier K.
Réponse : $D = t_f\,\frac{P}{3\,I\,K}\,L^3$, donc $K = t_f\,\frac{P}{3\,I\,D})$: L^3.

Question 2.12 : Dans le cas $n = 1$, quel serait l'instant du premier contact avec la table en recommençant l'expérience pour une longueur de poutre deux fois plus grande ?
Réponse : $\widetilde{t_f} = D\,\frac{3\,I\,K}{P\,\widetilde{L}^3}$, t_f est 8 fois plus court pour une poutre deux fois plus longue.

Question 2.13 : La déformée de la poutre peut-elle servir à identifier n ? Si oui, combien de points de mesure faut-il ?
Réponse : V est un polynôme de degré $n + 2$, il faut au moins $n + 3$ points de mesure pour l'identifier.