

## CRITERES DE PLASTICITE

1. **Comparaison des critères de von Mises et Tresca** : Tracer dans le plan des contraintes principales  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  la limite du domaine d'élasticité en accord avec les critères de von Mises et de Tresca,
- (a) dans le cas où les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ,
- (b) lorsque l'on superpose une troisième contrainte constante  $\sigma_3$ .
- a. Se reporter au cours.
- b.

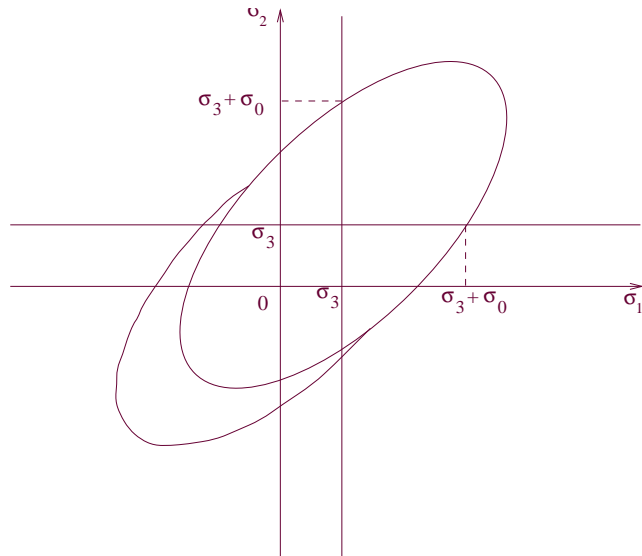


Figure 1 : Tracé du critère de von Mises dans le plan  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ , en contrainte plane et pour  $\sigma_3 \neq 0$

$$J = \left\{ (3/2) s_{ij} s_{ij} \right\}^{0.5}$$

$$J = \left\{ (1/2) \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^{0.5}$$

Le critère ne doit pas être modifié par l'addition d'un tenseur

sphérique. On en déduit que la forme du critère pour l'état de contrainte :  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est la même que celle obtenue pour :  $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3, 0)$ . La forme cherchée dans le plan  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  est donc obtenue par simple translation dans la direction de la première bissectrice. Ce résultat, illustré en figure 1 dans le cas du critère de von Mises, est également valable pour le critère de Tresca.

## 2. Plasticité cristalline.

a. Montrer que, dans le cas de la plasticité cristalline avec déformation par glissement cristallographique, la déformation s'effectue sans changement de volume.

b. Démontrer le «principe» du travail maximal pour un matériau obéissant à la loi de Schmid.

a. On considère un point quelconque  $M(x_1, x_2, x_3)$  du plan de normale  $\underline{n}$ . La distance de ce plan à l'origine est  $OP = h$ . On veut évaluer le tenseur de déformation uniforme produit par un glissement  $\gamma$  selon le vecteur  $\underline{m}$  du plan défini par sa normale  $\underline{n}$ . Le déplacement vaut :

$$\underline{u} = (\gamma h) \underline{m}$$

Comme  $h = \underline{OM} \cdot \underline{n} = x_i n_i$  :

$$u_i = \gamma x_k n_k m_i$$

$$u_{i,j} = \gamma x_{k,l} n_k m_i \text{ et } u_{j,i} = \gamma x_{k,i} n_k m_j$$

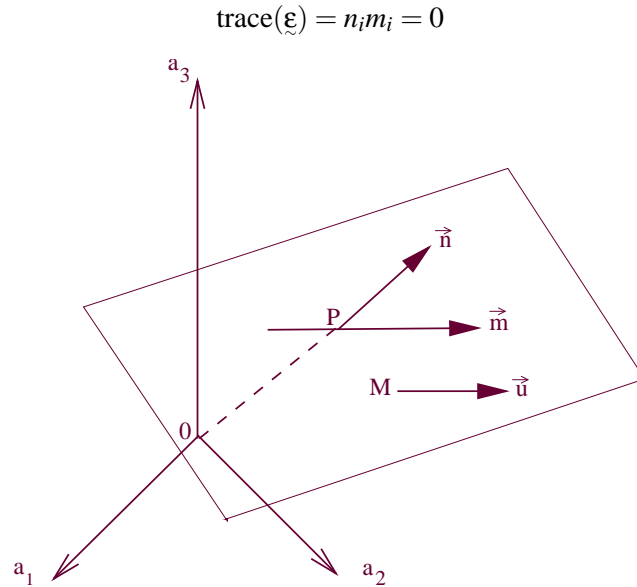
Comme  $x_{k,j} = \delta_{kj}$  :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} = \gamma (n_j m_i + n_i m_j)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{m} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{m})$$

La variation de volume associée à ce tenseur est bien entendu nulle,

en effet :



b. On considère un monocristal métallique qui se déforme plastiquement sur un seul système de glissement ( $\underline{\underline{n}}$ ,  $\underline{\underline{m}}$ ). On peut donc écrire (avec  $\dot{\gamma}$  positif ; une sollicitation en sens opposé déclencherait un autre système en direction  $-\underline{\underline{m}}$ ) :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (\underline{\underline{m}} \otimes \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{m}})$$

Le vecteur contrainte sur la facette  $\underline{\underline{n}}$  est  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{n}}$ , et la *cission réduite*  $\tau$  dans le plan  $\underline{\underline{n}}$  en direction  $\underline{\underline{m}}$  vaut :

$$\tau = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$$

Il vient donc, grâce à la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (n_j m_i + n_i m_j) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \sigma_{ij} n_i m_j = \tau \dot{\gamma}$$

Pour un état de contrainte admissible  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ , il vient :  $\underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \tau^* \dot{\gamma}$

Dire que  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est admissible au sens de la loi de Schmid revient à dire que la cission appliquée reste inférieure ou égale à la cission critique  $\tau_c$  ; il s'ensuit, avec  $\dot{\gamma} > 0$ , que :

$$\tau^* \dot{\gamma} \leq \tau_c \dot{\gamma}$$

si bien que l'on obtient également :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \leq \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$$

Ce résultat se généralise au cas de plusieurs systèmes actifs.

### 3. Plastification d'un tube mince.

On considère un tube mince de section circulaire, de rayon  $r$  et d'épaisseur  $e$ , chargé en pression interne  $p$ . Le matériau est supposé parfaitement plastique, de limite d'élasticité  $\sigma_y$ . On demande de définir la pression  $P_e$  à laquelle la plasticité débute et de donner à ce moment la direction de la vitesse de déformation plastique.

On étudiera pour le critère de Tresca et le critère de von Mises les 3 cas suivants :

a. Le tube est libre dans la direction  $z$ .

b. Le déplacement est bloqué dans la direction  $z$ .

c. Le tube est fermé (réservoir).

Dans tous les cas envisagés ici, le tenseur des contraintes est diagonal dans le repère des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . De plus, la contrainte  $\sigma_{rr}$  est négligeable.

On suppose que les critères de von Mises et de Tresca sont équivalents en traction simple, ils s'expriment donc en fonction de la limite d'élasticité en traction simple  $\sigma_y$  :

– von Mises :  $J = \sigma_y$

– Tresca :  $\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_y$

– Lorsque le tube est libre en direction  $z$ , le tenseur se réduit donc à

la diagonale :  $\underline{\sigma} = \text{Diag}(0; pr/e; 0)$ .

– Lorsque la déformation selon  $z$  est nulle, l'écriture de  $\varepsilon_{zz} = 0$  fournit :  $\underline{\sigma} = \text{Diag}(0; pr/e; \nu pr/e)$ .

– Enfin, dans le cas de la prise en compte d'un « effet de fond », il faut équilibrer la résultante due à la pression sur le couvercle ( $p\pi r^2$ ) par la contrainte  $\sigma_{zz}$ , soit  $\underline{\sigma} = \text{Diag}(0; pr/e; pr/2e)$ .

a. Le premier état correspond à de la traction simple. Les critères de von Mises et de Tresca prévoient l'apparition de la plasticité au même instant, lorsque la pression atteint la valeur :

$$P_e = \frac{\sigma_y e}{r}$$

Dans le cas du critère de von Mises, la direction d'écoulement, qui est définie par le déviateur du tenseur des contraintes, est  $\text{Diag}(-0,5; 1; -0,5)$ . Le point de fonctionnement se trouve sur une arête de la surface définie par le critère de Tresca, qui s'écrit :  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y$  ou  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \sigma_y$ . La première définition donne une direction  $\text{Diag}(-1; 1; 0)$ , et la seconde  $\text{Diag}(0; 1; -1)$ .

b. Ce nouvel état de contrainte introduit une contrainte intermédiaire  $\sigma_{zz}$  entre  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ . Comme le critère de Tresca est insensible à cette contrainte, le résultat concernant le début de plastification est inchangé. Le déviateur des contraintes s'écrit :  $(pr/3e)\text{Diag}(-(1 + \nu); 2 - \nu; 2\nu - 1)$ .

Le critère de von Mises prévoit donc la plastification pour :

$$P_e = \frac{\sigma_y e}{r\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}$$

En prenant  $\nu = 0,3$ , cette pression vaut environ  $1.125\sigma_y e/r$ ; le critère de von Mises est « optimiste ».

La direction d'écoulement pour le critère de von Mises est toujours proportionnelle au déviateur. Dans le cas du critère de Tresca,

l'écoulement est maintenant défini de façon non ambiguë par  $\text{Diag}(-1; 1; 0)$  puisque c'est cette fois-ci  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y$  qui est la seule expression valide.

c. Le critère de Tresca est de nouveau inchangé. Le déviateur et la pression limite d'après le critère de von Mises s'écrivent maintenant  $(pr/3e)\text{Diag}(-0,5; 0,5; 0)$ , et :

$$P_e = \frac{2\sigma_y e}{r\sqrt{3}}$$

soit environ  $1.15\sigma_y e/r$ .

Pour ce qui concerne la direction d'écoulement, on constate cette fois-ci que les deux critères prévoient la même direction, en *cisaillement pur*, la composante selon  $z$  restant nulle.

La figure 3 illustre les différents états de contrainte dans le plan  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$ , ainsi que les directions d'écoulement prévues.

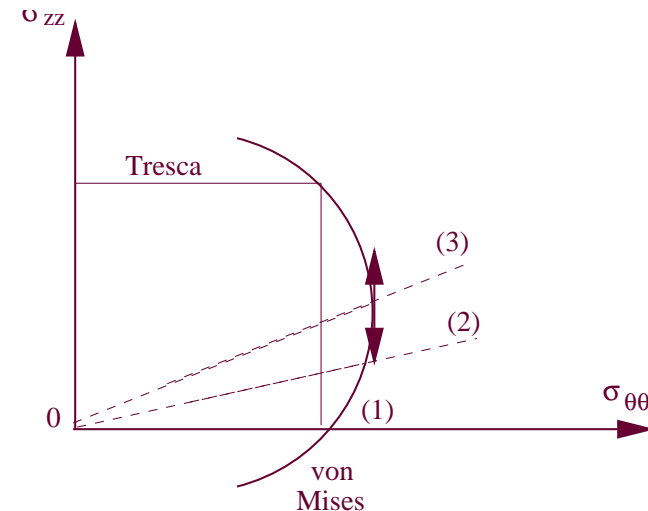


Figure 3 : Illustration des différents types de chargement dans un cylindre sous pression interne

#### 4. Critère de Tresca.

*Trouver la déformation équivalente associée au critère de Tresca.*

En se plaçant dans l'espace des contraintes principales, le critère de Tresca s'exprime par

$$\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_y$$

On suppose que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , il devient :  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$

L'écoulement plastique est parfaitement défini, par la diagonale  $\text{Diag}(0.5; 0; 0.5)\dot{\lambda}$ .

Si par contre deux contraintes principales sont égales, ainsi

$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ , il est possible d'écrire l'écoulement à partir de deux expressions différentes du critère, donc avec deux multiplicateurs, ou de façon identique pour la vitesse de déformation plastique, en

prenant une variable  $k$  réelle située entre  $-1$  et  $+1$  (la notation  $\dot{\lambda}$  change de signification entre les deux équations) :

$$\dot{\xi}^p = \text{Diag}(\dot{\lambda}; \dot{\mu}; -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}))$$

$$\dot{\xi}^p = \text{Diag}(0.5(1+k); 0.5(1-k); -1)\dot{\lambda}$$

Des expressions analogues peuvent être obtenues pour des combinaisons différentes des contraintes principales. On constate que, pour l'ensemble des combinaisons étudiées, on a :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} (|\dot{\xi}_1^p| + |\dot{\xi}_2^p| + |\dot{\xi}_3^p|)$$