

Table des matières

5	Variables d'écoulement	41
5.1	Introduction	41
5.2	Matériaux standards généralisés	41
5.2.1	Une brève présentation du formalisme	41
5.2.2	Exemple	42
5.3	Expression de quelques lois particulières en plasticité	43
5.3.1	Loi de Prandtl–Reuss	43
5.3.2	Loi de Hencky–Mises	44
5.3.3	Loi de Prager	44
5.3.4	Écoulement à vitesse de déformation totale imposée	45

Chapitre 5

Variables d'écrouissage

5.1 Introduction

La grande variété des comportements non linéaires se manifeste en particulier dans le durcissement (ou l'adoucissement !) observé en relation avec le processus de déformation (écrouissage, endommagement), dans l'évolution des propriétés liée au temps (vieillissement) ou à l'environnement (interactions multiphysiques).

Ces phénomènes sont liés à des réarrangements de la structure intime du matériau conduisant à un nouvel état. Si le comportement plastique se révèle inchangé, c'est qu'on est en présence d'un comportement parfaitement plastique, sans écrouissage, comme celui qui a été étudié au chapitre précédent. Le domaine d'élasticité sera modifié dans le cas du comportement à écrouissage positif (durcissement) ou négatif (adoucissement). Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes, au cours d'une sollicitation cyclique par exemple. Le type d'écrouissage peut par ailleurs être modifié par des trajets de chargements complexes ou par le vieillissement du matériau.

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité au cours de la déformation inélastique. Ainsi qu'on l'a vu dans le cas uniaxial, les principales classes d'écrouissage sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. On se contente ici de tracer un cadre général qui permet le développement des modèles nécessaires.

Le formalisme va différer assez peu de celui qui a été employé dans la partie précédente. On va simplement rajouter deux séries de variables représentant l'écrouissage, des *variables d'état*, qui seront pour le moment désignées collectivement par α_I , et leurs variables associées A_I , intervenant dans la définition du seuil de plasticité. Par rapport au chapitre précédent, le modèle s'enrichit, puisque :

- il faut poser une relation entre les A_I et les α_I ;
- il faut étendre l'expression de la fonction $f(\underline{\sigma})$, en introduisant les A_I , soit $f(\underline{\sigma}, A_I)$;
- en plus de la vitesse d'évolution de $\underline{\varepsilon}^p$ (ou $\underline{\varepsilon}^{vp}$), il faut déterminer celle des α_I .

5.2 Matériaux standards généralisés

5.2.1 Une brève présentation du formalisme

L'approche la plus stricte d'un point de vue théorique consiste à étendre au cas de l'écoulement (visco)plastique avec écrouissage les concepts qui ont été introduits pour le comportement sans écrouissage. Dans cette construction, on range les variables d'écrouissage aux côtés de la déformation élastique dans l'énergie libre, que l'on note ici Ψ (voir le cours de MMC [1], chapitre 6 pour une présentation du potentiel d'élasticité). De même que la contrainte s'obtient alors en prenant la dérivée partielle par rapport à la déformation élastique, les A_I vont s'obtenir par dérivation partielle par rapport aux α_I (extension de la notion de potentiel d'élasticité).

On étend par ailleurs les lois de l'écoulement plastique aux α_I , si bien que la fonction de charge, $f(\underline{\sigma}, A_I)$, va servir de (pseudo)potentiel pour définir l'évolution des α_I , comme celle des déformations plastiques ou viscoplastiques.

On définit ainsi un cadre de modélisation *standard généralisé* [2], dans lequel, par définition :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\tilde{\xi}}^e} \quad (5.1)$$

$$A_I = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_I} \quad (5.2)$$

Dans le cas d'un formalisme de plasticité, il vient également :

$$\underline{\tilde{\xi}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\tilde{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{n}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I} \quad (5.3)$$

D'un point de vue physique, on retrouve là une simple extension du principe du travail maximal de Hill. En établissant l'inégalité de Clausius-Duhem dans le cas d'un processus dissipatif, on montre que, pour un comportement de plasticité avec écrouissage, la puissance dissipée est égale à :

$$\mathcal{D} = \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\xi}}^p - A_I \dot{\alpha}_I \quad (5.4)$$

Cette équation, qui est établie par la thermodynamique des milieux continus, indique que la puissance dissipée dans le processus de déformation est la différence entre la puissance plastique et la quantité stockée (de façon temporaire ou définitive) dans le matériau par le processus d'écrouissage. On aura par exemple une illustration du terme $A_I \dot{\alpha}_I$ en considérant l'énergie élastique stockée dans le ressort du modèle de Prager par le processus d'écrouissage, puis rendue lors de la décharge. Les équations d'évolution sont alors obtenues en maximisant cette énergie, sous la condition que f reste négatif ou nul. Il suffit pour cela de prendre les dérivées partielles de F par rapport à $\underline{\tilde{\xi}}^p$ et α_I , avec :

$$F(\underline{\tilde{\sigma}}, A_I) = \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\xi}}^p - A_I \dot{\alpha}_I - \dot{\lambda} f \quad (5.5)$$

Cette classe de matériaux est intéressante d'un point de vue théorique. Dans le cas où l'énergie libre est une fonction quadratique et définie positive des variables $\underline{\tilde{\xi}}^e$ et α_I , et où le potentiel plastique est une fonction convexe de $\underline{\tilde{\sigma}}$ et A_I , il est possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution [3].

5.2.2 Exemple

L'écriture ci-dessus fournit de façon naturelle la nature des variables d'écrouissage à utiliser pour représenter l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. En prenant comme exemple le cas du critère de von Mises, la fonction de charge s'écrit, en introduisant le scalaire R pour modéliser l'écrouissage isotrope et le tenseur $\underline{\mathbf{X}}$ pour l'écrouissage cinématique (qui est un tenseur déviatorique) :

$$f(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\mathbf{X}}, R) = J(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\mathbf{X}}) - R - \sigma_y = \left((3/2)(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\mathbf{X}}) : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\mathbf{X}}) \right)^{0,5} - R - \sigma_y \quad (5.6)$$

On appellera respectivement r et α les variables associées à R et $\underline{\mathbf{X}}$. L'énergie libre s'écrit alors comme la somme de la contribution élastique habituelle, Ψ_e , et de deux termes additionnels :

$$\Psi(\underline{\tilde{\xi}}^e, R, \underline{\mathbf{X}}) = \Psi_e(\underline{\tilde{\xi}}^e) + \frac{1}{2} H r^2 + \frac{1}{2}$$

La variable tensorielle $\underline{\alpha}$ associée à la variable d'écoulement $\underline{\mathbf{X}}$ n'est donc pas autre chose que la déformation plastique elle-même, alors que la vitesse de la variable r associée à la variable d'écoulement R s'identifie au multiplicateur plastique :

$$\underline{\dot{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (5.9)$$

On note que, dans ce cas, la variable r s'identifie à la *déformation plastique cumulée*, p , qui mesure la longueur du trajet de déformation, et qui se définit par :

$$\dot{p} = ((2/3) \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} : \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p})^{0,5} \quad (5.10)$$

En utilisant le fait que $\underline{\mathbf{n}} : \underline{\mathbf{n}} = 3/2$, on a en effet :

$$((2/3) \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} : \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p})^{0,5} = \left((2/3) \dot{\lambda} \underline{\mathbf{n}} : \dot{\lambda} \underline{\mathbf{n}} \right)^{0,5} = \dot{\lambda} \quad (5.11)$$

Sous chargement uniaxial, lorsque le tenseur de vitesse de déformation plastique est une diagonale $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -(1/2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -(1/2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$, le calcul de \dot{p} donne : $\dot{p} = |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$.

5.3 Expression de quelques lois particulières en plasticité

5.3.1 Loi de Prandtl–Reuss

C'est la loi obtenue en utilisant le critère de von Mises et une règle d'écoulement isotrope. La fonction de charge est donc :

$$f(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, R) = J(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) - \sigma_y - R(p) \quad (5.12)$$

L'écoulement isotrope est décrit par la fonction $R(p)$. Dans le cas d'un chargement uniaxial, en traction où seule la composante $\sigma_{11} = \sigma$ est non nulle, l'égalité $f(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, R) = 0$ se résume à :

$$\sigma = \sigma_y + R(p) \quad (5.13)$$

La courbe décrite par $(\sigma_y + R(p))$ est donc la courbe d'écoulement en chargement uniaxial monotone, la déformation de traction $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p$ étant égale dans ce cas à la déformation plastique cumulée. Le module plastique peut être évalué comme la pente à cette courbe.

$$\sigma = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \quad H = \frac{dR}{d\varepsilon^p} = \frac{dR}{dp} \quad (5.14)$$

$R(p)$ peut être définie point par point, par une fonction puissance ou une fonction exponentielle, comme on l'a vu dans le chapitre sur la plasticité uniaxiale.

Quelle que soit la forme choisie pour R , la condition de cohérence permet de trouver le multiplicateur plastique ($\dot{\lambda} = \dot{p}$) :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad \text{s'écrit} \quad \underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} - H \dot{p} = 0 \quad \text{et} \quad (5.15)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}}{H} \quad (5.16)$$

La loi de Prandtl-Reuss permet de déterminer la direction et l'intensité de l'écoulement plastique :

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{n}} = \frac{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}}{H} \underline{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}{J} \quad (5.17)$$

Dans le cas particulier de la traction simple, cette expression générale se réduit bien à la forme uniaxiale habituelle :

$$n_{11} = \text{signe}(\sigma) \quad \underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\sigma}} = \dot{\sigma} \text{signe}(\sigma) \quad \text{et} : \quad \dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (5.18)$$

$$\text{si bien que} : \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{n_{11} \dot{\sigma}}{H} n_{11} = \frac{\dot{\sigma}}{H} \quad (5.19)$$

5.3.2 Loi de Hencky–Mises

Il s'agit d'une expression toute intégrée du modèle de plasticité, qui est valide uniquement dans le cas d'un *chargement simple*, c'est-à-dire lorsque le chargement extérieur en termes de contraintes croît proportionnellement à un seul paramètre scalaire k , à partir d'un état initial non écroui. On a alors :

$$\underline{\sigma} = k \underline{\sigma}_M \quad \underline{\dot{\sigma}} = \dot{k} \underline{\sigma}_M \quad \underline{\mathbf{s}} = k \underline{\mathbf{s}}_M \quad J = k J_M \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (5.20)$$

La direction d'écoulement ne change pas tout au long de l'écoulement :

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\mathbf{s}}_M}{J_M} \quad \text{constant} \quad (5.21)$$

Par ailleurs, l'expression de l'intensité de l'écoulement se simplifie, en suivant :

$$\frac{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\sigma}}}{H} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}_M}{J_M} : \frac{\underline{\sigma}_M \dot{k}}{H} = \frac{J_M}{H} \dot{k} \quad (5.22)$$

PantM18238 Td.967 -3.710.9232.102 -447.828 cm BT /F63 10.909 Tf 238.044 437[(n) q 0 0 9J/F15 10.909 Tf 18.202 T

La condition de cohérence s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}}{J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} \quad (5.27)$$

On obtient donc :

$$\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{n}} : \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{n}} \dot{\lambda} \right) = H \dot{\lambda} \quad \text{avec} \quad H = \frac{2}{3} (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{n}}) \quad (5.28)$$

Il vient donc de nouveau :

$$\dot{\lambda} = (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) / H \quad (5.29)$$

Le multiplicateur plastique a la même expression formelle que dans le cas de l'érouissage isotrope ; il faut néanmoins noter que la définition de $\underline{\underline{n}}$ est modifiée, et que H est constant. Sous chargement uniaxial, $\sigma = \sigma_{11}$ étant la seule composante non nulle du tenseur des contraintes, et en posant $X = (3/2)X_{11}$, la fonction de charge et la condition de cohérence s'écrivent :

$$|\sigma - X| = \sigma_y \quad \dot{\sigma} = \dot{X} = H \dot{\epsilon}^p \quad (5.30)$$

5.3.4 Écoulement à vitesse de déformation totale imposée

Comme l'indiquent les deux exemples du paragraphe précédent, la condition de cohérence se met toujours sous la même forme, pour les lois de comportement courantes des matériaux isotropes. Par comparaison avec le cas du matériau parfaitement plastique, seule va changer cette condition de cohérence ; il faut donc maintenant partir de :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = H \dot{\lambda} \quad (5.31)$$

Après multiplication des deux membres de la première relation par $\underline{\underline{n}}$, il vient cette fois-ci :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \quad (5.32)$$

Remarques :

- Dans le cas de l'élasticité isotrope et d'un matériau de von Mises, l'expression du multiplicateur devient :

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{H + 3\mu} \quad (5.33)$$

- On appelle tenseur élastoplastique tangent l'opérateur qui permet d'obtenir la vitesse de déformation plastique en fonction de la vitesse de déformation totale. Les équations 5.31 et 5.32 permettent d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p - \Lambda_{ijkl} \left(\frac{n_{mn} \Lambda_{mnpq} \dot{\epsilon}_{pq}}{H + n_{rs} \Lambda_{rstu} n_{tu}} \right) n_{kl} \quad (5.34)$$

$$= \Lambda_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p - \frac{(\Lambda_{ijkl} n_{kl}) (n_{mn} \Lambda_{mnpq})}{H + n_{rs} \Lambda_{rstu} n_{tu}} \dot{\epsilon}_{pq} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

Soit :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{L}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{L}}^{ep} = \underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \quad (5.37)$$

Résumé

Une expression de l'énergie libre :

$$Y(e^e; R; X) = Y_e(e^e) + \frac{1}{2} H r^2 + \frac{1}{2} X : C : X$$

Définition de la contraintes et des variables d'écroûissage :

$$s = r \frac{\partial Y}{\partial e^e} \quad A_i = r \frac{\partial Y}{\partial a_i}$$

Lois d'écoulement généralisées :

$$e^p = l \frac{\partial f}{\partial s} = l n \quad a_i = l \frac{\partial f}{\partial A_i}$$

avec la forme de f précédente, et

$$f(s; X; R) = J(s - X) - R s_y = (3/2)(s - X) : (s - X)^{0.5} - R s_y$$

c'est la déformation plastique cumulée qui est la variable d'état de l'écroûissage isotrope, et e^p qui est celle de l'écroûissage cinématique linéaire.

Règle de Prandtl–Reuss :

$$e^p = \frac{n : s}{H} n$$

ou :

$$e^p = \frac{n : L : e}{H + n : L : n} n$$

Opérateur élastoplastique tangent :

$$e^p = L^{ep} : e \quad \text{avec : } L^{ep} = L \frac{(L : n) (n : L)}{H + n : L : n}$$

Bibliographie

- [1] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, and S. Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Cours 1ère année, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [2] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *J. of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983.
- [3] Q.S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, 2000.