

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>6</b> | <b>Introduction à la mécanique des matériaux hétérogènes</b>               | <b>47</b> |
| 6.1      | Moyennes de volume, moyennes de surface . . . . .                          | 47        |
| 6.2      | Volume élémentaire représentatif, propriétés effectives . . . . .          | 49        |
| 6.3      | Propriétés élastiques effectives . . . . .                                 | 50        |
| 6.4      | Potentiel élastique . . . . .  | 52        |
| 6.5      | Théorème de l'énergie potentielle : borne supérieure de Voigt . . . . .    | 54        |
| 6.6      | Théorème de l'énergie complémentaire : borne inférieure de Reuss . . . . . | 55        |
| 6.7      | Application à l'élasticité isotrope . . . . .                              | 56        |

## Chapitre 6

# Introduction à la mécanique des matériaux hétérogènes

Les matériaux de structures possèdent une échelle physique en deçà de laquelle ils ne peuvent plus être considérés comme homogènes. C'est évident dans le cas des composites étudiés précédemment à l'échelle des plis, fibres ou inclusions individuelles. De manière moins évidente, c'est le cas aussi des alliages métalliques qui sont en fait des assemblages de grains monocristallins présentant des orientations cristallines distinctes de grain à grain. Ces deux types de morphologie, à savoir la morphologie fibre/matrice rencontrée dans les composites et la morphologie polycristalline, sont illustrés par les figures 6.1 et 6.2 respectivement. Pour le dimensionnement d'une structure, il n'est pas raisonnable ni encore possible de prendre directement en compte l'influence de l'ensemble de ces hétérogénéités sur la réponse du composant. On cherche donc à remplacer le matériau hétérogène par un milieu dit *homogène équivalent* caractérisé par des propriétés mécaniques effectives. Ces dernières résultent de l'interaction entre eux des constituants (dits aussi phases) au sein d'un volume élémentaire  $dV$  du matériau considéré. L'objectif est donc, par exemple dans le cas des composites, de déterminer les modules d'élasticité effectifs du matériau composite à partir de la connaissance des propriétés élastiques des constituants, de leur fraction volumique et de leur arrangement. Le problème posé est très général et englobe des situations plus complexes encore que les stratifiés étudiés précédemment, pour lesquels l'intuition pouvait fournir par exemple des cinématiques raisonnables. On le verra, *les propriétés effectives ne s'obtiennent pas par une simple moyenne* des propriétés des constituants pondérées par les fractions volumiques. La distribution dans l'espace des différentes phases en présence est la clef pour optimiser par la microstructure les propriétés souhaitées.

La mécanique des matériaux hétérogènes est une discipline de la mécanique des matériaux qui est en pleine expansion. Les développements actuels concernent essentiellement les comportements non linéaires, ils sont rendus possibles par les progrès simultanés des concepts théoriques, de la puissance de calcul et des méthodes d'investigation expérimentale. La présentation faite dans ce chapitre se limite à l'élasticité, et cherche seulement par des exemples élémentaires à montrer quelques idées fondamentales et certains outils de base du domaine.

### 6.1 Moyennes de volume, moyennes de surface

On utilisera abondamment dans la suite le théorème de Stokes qui, pour une fonction scalaire  $u(x_1, x_2, x_3)$ , intégrée sur un domaine  $V$  de frontière  $\partial V$ , s'énonce de la façon suivante :

$$\int_V u_{,i} dV = \int_{\partial V} u n_i dS \quad (6.1)$$

La notation  $_{,i}$  désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée cartésienne  $x_i$  (base orthonormée). Le vecteur  $\underline{n}$  de composantes cartésiennes  $n_i$  représente le vecteur normal en tout point de la surface  $\partial V$ .

On renvoie au cours de géométrie différentielle pour la démonstration de ce résultat.

On peut utiliser ce théorème pour relier la moyenne sur le volume  $V$  d'un champ de déformation compatible  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  à la moyenne des valeurs sur le bord  $\partial V$  de ce champ. La compatibilité du champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  signifie qu'il dérive d'un champ de déplacement  $\underline{u}'$ . On introduit la notation suivante pour la moyenne volumique :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}' dV \quad (6.2)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u'_{i,j} + u'_{j,i}) dV \quad (6.3)$$

L'application du théorème de Stokes à chaque composante de déplacement conduit à :

$$\langle u'_{i,j} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} u_i n_j dS \quad (6.4)$$

Finalement, on obtient

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \underline{u} \otimes \underline{n} dS \quad (6.5)$$

où le produit tensoriel symétrisé a été introduit :

$$\underline{u} \otimes \underline{n} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{u}) \quad (6.6)$$

On relie de manière similaire la moyenne volumique du tenseur des contraintes à la résultante du vecteur traction sur le bord. On considère pour cela un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  défini sur  $V$  que l'on suppose statiquement admissible. Cela signifie ici que sa divergence est nulle en tout point :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = \sigma^*_{ik,k} \underline{e}_i = 0 \quad (6.7)$$

où les  $\underline{e}_i$  désignent les vecteurs de la base cartésienne. On vérifiera alors que

$$\begin{aligned} \langle \sigma^*_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma^*_{ij} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\sigma^*_{ik} x_j)_{,k} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma^*_{ik} n_k x_j dS \end{aligned}$$

En notation intrinsèque ce résultat s'écrit

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \otimes \underline{x} dS \quad (6.8)$$

On remarquera que la symétrie du membre de droite de l'équation (6.8) n'est pas apparente. Pourtant, on montrerait de la même façon que le résultat est identique à l'expression obtenue en remplaçant dans le second membre le signe  $\otimes$  par  $\otimes^s$ .

Le travail des forces internes associé aux champs admissibles  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  se calcule alors de la façon suivante :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma^*_{ij} u'_{i,j} dV = \frac{1}{V} \int_V (\sigma^*_{ij} u'_i)_{,j} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}' dV \quad (6.9)$$

Les formules de moyennes précédentes supposent la continuité des champs au sein du volume considéré. Des termes supplémentaires apparaissent dans le cas où des discontinuités sont présentes (fissures, pores...).

## 6.2 Volume élémentaire représentatif, propriétés effectives

Les propriétés effectives du milieu homogène équivalent cherché peuvent être obtenues en résolvant un problème aux limites sur le volume élémentaire  $dV$ , à condition que celui-ci soit suffisamment grand pour être représentatif de la microstructure du matériau hétérogène. Ce volume doit pour cela contenir suffisamment d'hétérogénéités (grains, inclusions ou fibres). Si la distribution des constituants est périodique (comme dans le cas du composite de la figure 6.1b), le volume nécessaire se réduit à une cellule élémentaire permettant de reconstituer l'ensemble de la microstructure par simple translation (pavage). On soumet alors le volume retenu à des sollicitations élémentaires pour déterminer la réponse résultante. La difficulté réside en fait dans le choix des conditions aux limites à appliquer au volume considéré pour imposer une déformation ou contrainte globale moyenne donnée (dite macroscopique).

On mentionne ici trois types de conditions aux limites permettant d'imprimer au volume considéré une déformation ou une contrainte moyenne :

- Conditions de déformations homogènes au contour (problème  $\mathcal{PE}$ ) :

$$\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.10)$$

où  $\underline{E}$  est un tenseur symétrique imposé indépendant de  $\underline{x}$ .

- Conditions de contraintes homogènes au contour (problème  $\mathcal{PS}$ ) :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.11)$$

où  $\underline{\Sigma}$  est un tenseur symétrique imposé indépendant de  $\underline{x}$ .

- Conditions de périodicité (problème  $\mathcal{PP}$ ) : lorsque le milieu est périodique, la cellule  $V$  est connue dans ses moindres détails géométriques et sa forme est telle que l'on peut paver l'espace en translatant  $V$ . On cherche alors un champ solution de la forme :

$$\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{v} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (6.12)$$

où  $\underline{v}$  est périodique, *i.e.*  $\underline{v}$  prend des valeurs égales en des points homologues sur des faces opposées de  $V$  ; on impose d'autre part que le vecteur contrainte  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  prenne des valeurs opposées sur des faces opposées. Il existe aussi une formulation duale du problème périodique.

On peut alors prouver l'existence et l'unicité de la solution de ces trois problèmes aux limites, au moins dans le cas linéaire (éventuellement à un mouvement de corps rigide ou un translation près). Dans tous les cas, il résulte des calculs de moyennes de la section précédente (équations (6.5) et (6.8)) que :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E} \quad (6.13)$$

dans le cas des conditions de déformations homogènes au contour et le cas périodique, et

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} \quad (6.14)$$

pour les conditions duales en contraintes. Les moyennes sont effectuées sur le volume  $V$  et les majuscules (resp. minuscules) désignent les grandeurs macroscopiques (resp. microscopiques). On peut aussi calculer la moyenne du travail des forces internes au sein du volume élémentaire sollicité et montrer, à nouveau grâce au théorème de Stokes, que pour les trois conditions aux limites précédentes :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{E} \quad (6.15)$$

On voit que le travail des forces internes macroscopique est alors égal à la moyenne du travail des forces internes microscopiques.

La solution des problèmes aux limites correspondants n'est en général pas analytique. On a recours à des simulations numériques, par exemple par la méthode des éléments finis. Un exemple de volume élémentaire représentatif (VER) est donné sur la figure 6.3, dans le cas de la morphologie polycristalline.

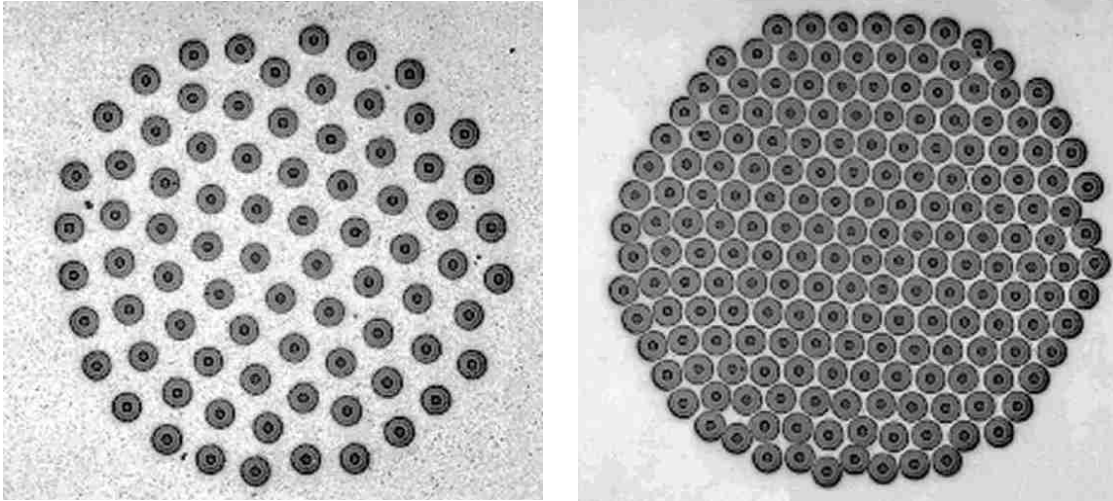
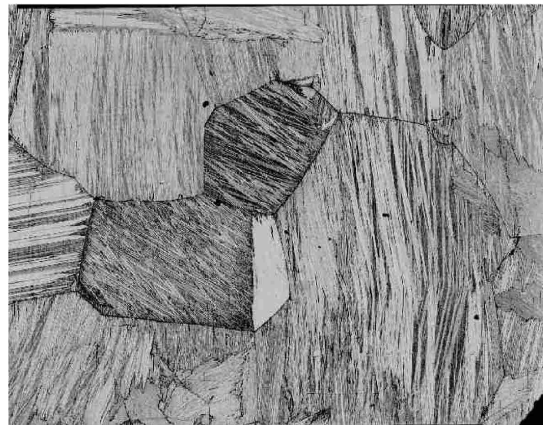


FIG. 6.1 – Composite à matrice métallique SiC-titane pour application aéronautique pour deux fractions volumiques de fibres différentes (diamètre des fibres  $600\ \mu\text{m}$ )



a. Microstructure d'un revêtement de tôle d'acier galvanisée.



b. Microstructure d'un alliage à mémoire de forme Cu-Zn-Al.

FIG. 6.2 – Morphologie polycristalline dans les matériaux hétérogènes

### 6.3 Propriétés élastiques effectives

Le problème aux limites précédent posé sur le VER admet, dans le cas élastique linéaire, une solution unique qui dépend linéairement du chargement macroscopique  $\tilde{E}$  imposé. Il existe donc un champ de tenseur unique dit de concentration permettant d'exprimer la déformation en un point  $\underline{x}$  au sein du VER

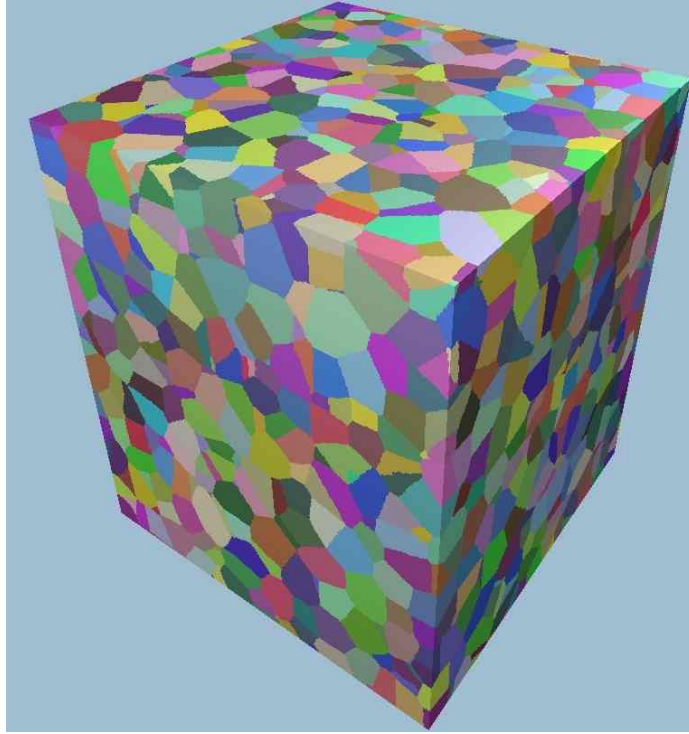


FIG. 6.3 – Volume élémentaire représentatif d'un polycristal

en fonction de la déformation macroscopique appliquée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (6.16)$$

Il est en général impossible d'obtenir une expression analytique de  $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$  mais on peut le déterminer de manière numérique. Puisque la moyenne des déformations locales doit donner  $\underline{\underline{E}}$ , il s'ensuit que le tenseur de concentration vérifie la propriété suivante :

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{1}} \quad (6.17)$$

où  $\underline{\underline{1}}$  désigne le tenseur identité d'ordre 4 sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques. Les contraintes macroscopiques sont alors liées aux déformations macroscopiques imposées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \\ &= \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle \\ &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle \end{aligned} \quad (6.18)$$

On voit que la loi de comportement macroscopique prend la forme d'une loi d'élasticité avec un tenseur des modules effectifs  $\underline{\underline{C}}$ . En particulier, il apparaît clairement que  $\underline{\underline{C}}$  n'est pas une simple moyenne des modules locaux  $\underline{\underline{c}}(\underline{x})$  mais une moyenne pondérée par le tenseur de concentration  $\underline{\underline{A}}$  qui dépend explicitement de la distribution des phases au sein du VER. Le cas particulier d'un VER homogène conduit bien sûr à  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$  et  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{c}}$ . Ce n'est plus le cas dès que le matériau est hétérogène.

De même, si le VER est soumis au tenseur de contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , il existe un tenseur de localisation  $\underline{\underline{B}}$  donnant le tenseur des contraintes en chaque point du VER en fonction de la charge

imposée :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.19)$$

Les modules de souplesse effectifs s'expriment alors en fonction de  $\underline{\underline{B}}$  :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}} = \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{s}} \rangle \quad (6.20)$$

où  $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{c}}^{-1}$ . Lorsque le volume de matériau considéré est représentatif (i.e. suffisamment grand), la détermination des propriétés effectives ne dépend pas du choix des conditions aux limites de sorte que l'on a

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (6.21)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique peut aussi être défini à l'aide d'une définition énergétique de la forme :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.22)$$

On vérifiera que les modules effectifs s'expriment alors de la façon suivante à l'aide des tenseurs de concentration  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  précédents :

$$\underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle = \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle^{-1} \quad (6.23)$$

On montre, à l'aide des propriétés (6.15) et (6.17), qu'en fait les définitions directe (équations (6.18) et (6.20)) et énergétique (équation (6.22)) sont équivalentes. En particulier les modules effectifs obtenus sont les mêmes.

## 6.4 Potentiel élastique

Dans la suite on étudie les propriétés de matériaux hétérogènes dont les constituants ont un comportement élastique éventuellement non linéaire décrit par un potentiel  $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (6.24)$$

Le potentiel élastique choisi est l'énergie libre de Helmholtz. Chaque constituant du matériau hétérogène étudié possède un potentiel distinct. On suppose qu'il existe pour le milieu homogène équivalent cherché un potentiel effectif  $W^{eff}(\underline{\underline{E}})$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = W^{eff'}(\underline{\underline{E}}) = \frac{\partial W^{eff}}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (6.25)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, ces potentiels sont les formes quadratiques suivantes :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad W(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \quad (6.26)$$

On demande à tous les potentiels rencontrés d'être convexes par rapport à leurs arguments. Cette condition est trivialement remplie dans le cas de l'élasticité linéaire.

On associe à  $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$  le potentiel dual  $W^*(\underline{\underline{\sigma}})$ , appelé énergie complémentaire, tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = W^{*'}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.27)$$

Les potentiels direct et dual sont représentés schématiquement sur la figure 6.4 dans le cas uniaxial. On voit en particulier que, puisque  $W$  désigne l'aire sous la courbe,  $W^*$  représente le complément d'aire dans le rectangle  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$  :

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - W(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}} = W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.28)$$

On peut donner l'expression équivalente suivante faisant intervenir la transformée de Legendre–Fenchel :

$$W^*(\underline{\sigma}) = \max_{\underline{\varepsilon}} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - W(\underline{\varepsilon})) \quad (6.29)$$

Pour montrer l'équivalence entre les définitions (6.28) et (6.29), on s'appuie sur la convexité du potentiel  $W(\underline{\varepsilon})$ . On voit sur la figure 6.5 que, pour un  $\underline{\sigma}$  donné, l'écart entre  $\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$  et  $W$  est maximal pour la déformation  $\underline{\varepsilon}$  telle que la tangente à la courbe  $W$  en  $\underline{\varepsilon}$  est parallèle à la droite  $\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$ . Cette situation correspond donc bien à  $\underline{\sigma} = W'(\underline{\varepsilon})$ . La démonstration s'étend au cas tridimensionnel. Le potentiel dual est convexe par rapport à ses arguments dès que le potentiel élastique l'est.

De même, on peut définir le potentiel dual pour les propriétés effectives du milieu homogène équivalent  $W^{eff*}(\underline{\Sigma})$  tel que

$$\underline{E} = \frac{\partial W^{eff*}}{\partial \underline{\Sigma}} \quad (6.30)$$

Le cas particulier de l'élasticité linéaire prend la forme très simple :

$$W^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{s} : \underline{\sigma} = W(\underline{\varepsilon}) \quad (6.31)$$

$$W^*(\underline{\Sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \quad (6.32)$$

On admet qu'alors les souplesses s'obtiennent à partir des modules d'élasticité effectifs par la relation

$$\underline{S} = \underline{C}^{-1} \quad (6.33)$$

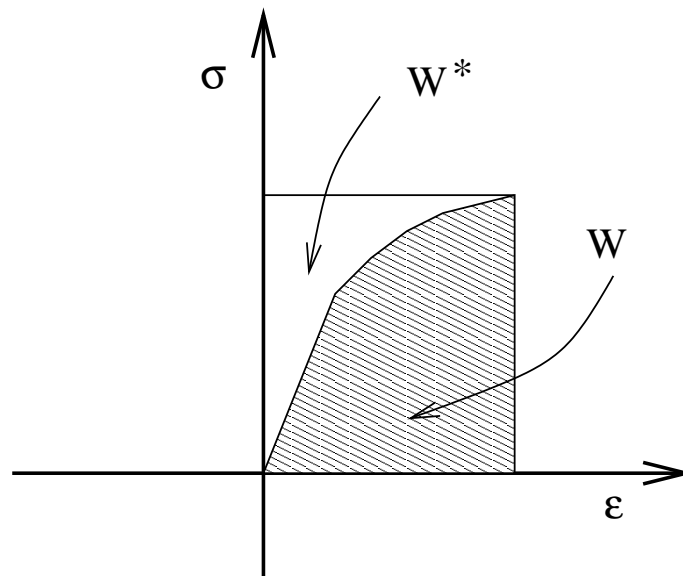


FIG. 6.4 – Réponse non linéaire du matériau dans le cas uniaxial et définition du potentiel élastique et de l'énergie complémentaire :  $W(\underline{\varepsilon}) = \int_0^{\underline{\varepsilon}} W'(\underline{\varepsilon}) d\underline{\varepsilon}$ ,  $W^*(\underline{\sigma}) = \int_0^{\underline{\sigma}} W'^*(\underline{\sigma}) d\underline{\sigma}$ . On en déduit que  $W$  est l'aire sous la courbe et  $W^*$  l'aire complémentaire



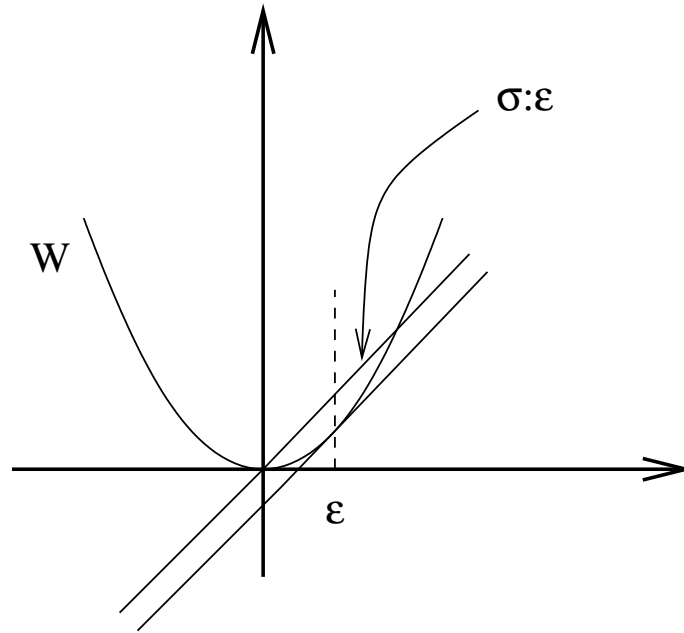


FIG. 6.5 – Transformée de Legendre–Fenchel d’un potentiel d’élasticité convexe

## 6.5 Théorème de l’énergie potentielle : borne supérieure de Voigt

On considère le problème aux limites suivant sur le volume  $V$  de matériau hétérogène :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} &= W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) \\ \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{u}}^d \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \partial V\end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{u}}$  désigne le champ de déplacement dont dérive  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\underline{\underline{f}}$  d’éventuels efforts volumiques. Dans ce problème, le déplacement est imposé sur le contour de  $V$ . Le théorème de l’énergie potentielle stipule alors que la solution  $\underline{\underline{u}}$  sur  $V$  minimise l’énergie potentielle  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}(\underline{\underline{u}}) = \int_V (W(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}) dV \quad (6.34)$$

par rapport aux champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\underline{\underline{u}}'$ . On dit que  $\underline{\underline{u}}'$  est cinématiquement admissible s’il vérifie les conditions aux limites  $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^d$  sur  $\partial V$ .

La démonstration de ce théorème est basée à nouveau sur la propriété de convexité du potentiel  $W$ , ainsi que sur le théorème de Stokes. Si  $\underline{\underline{u}}$  est la solution du problème aux limites considéré et  $\underline{\underline{u}}'$  un champ cinématiquement admissible, on établit que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\underline{\underline{u}}') - \mathcal{F}(\underline{\underline{u}}) &= \int_V (W(\underline{\underline{\varepsilon}}') - W(\underline{\underline{\varepsilon}})) dV \\ &\geq \int_V W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}}) dV \\ &\geq \int_V (\underline{\underline{\sigma}}_{ij}(\underline{\underline{u}}'_i - \underline{\underline{u}}_i))_{,j} dV \\ &\geq \int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}}_{ij}(\underline{\underline{u}}'_i - \underline{\underline{u}}_i) n_j dS = 0\end{aligned}$$

puisque  $\underline{\underline{u}}$  et  $\underline{\underline{u}}'$  coïncident sur le bord de  $V$ . Ceci démontre le théorème de l’énergie potentielle. La figure 6.6 illustre la propriété de convexité de  $W$  utilisée.

Explorons les conséquences de ce théorème dans le cas particulier du problème aux limites  $\mathcal{PE}$  posé sur le VER, pour lequel

$$\underline{u}^d = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.35)$$

On se restreint en outre au cas de constituants élastiques linéaires. Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = V \frac{1}{2} \underline{\Sigma} : \underline{E} = \frac{1}{2} V \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} \leq \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}' : \underline{c} : \underline{\varepsilon}' dV \quad (6.36)$$

On peut utiliser cette inégalité pour borner les propriétés élastiques effectives en choisissant des champs tests cinématiquement admissibles  $\underline{u}'$ . Le choix le plus simple compatible avec les conditions aux limites du problème  $\mathcal{PE}$  est :

$$\underline{u}' = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (6.37)$$

ce qui implique

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{E} \quad (6.38)$$

On choisit donc comme champ test le champ de déformation homogène  $\underline{E}$  lui-même, qui n'est qu'une grossière approximation du champ réel  $\underline{\varepsilon}$ . Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\underline{E} : \underline{C} : \underline{E} \leq \underline{E} : \langle \underline{c} \rangle : \underline{E}, \quad \forall \underline{E} \quad (6.39)$$

Cette relation fournit une borne supérieure pour les propriétés effectives  $\underline{C}$ . Cette borne est la moyenne des propriétés locales  $\langle \underline{c} \rangle$ . Elle est appelée borne supérieure de Voigt. Elle indique que quel que soit l'arrangement des phases au sein du matériau hétérogène, les propriétés effectives ne peuvent excéder la moyenne volumique des propriétés des constituants.

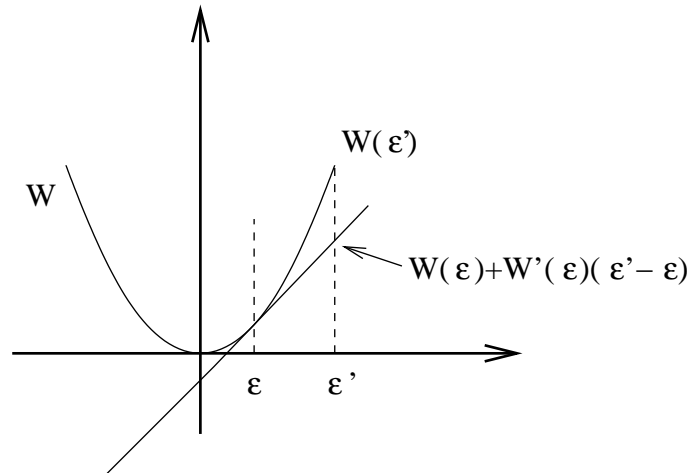


FIG. 6.6 – Propriété de convexité du potentiel élastique

## 6.6 Théorème de l'énergie complémentaire : borne inférieure de Reuss

La formulation duale du théorème de l'énergie potentielle constitue le théorème de l'énergie complémentaire. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} &= 0 \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{W}^{*'}(\underline{\sigma}) \\ \underline{T} &= \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \forall \underline{x} \in \partial V \end{aligned}$$

La solution en contrainte  $\tilde{\sigma}$  minimise alors la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}^*(\tilde{\sigma}^*) = \int_V W^*(\tilde{\sigma}^*) dV \quad (6.40)$$

pour tout champ de contrainte  $\tilde{\sigma}^*$  statiquement admissible (i.e. autoéquilibré ( $\text{div } \tilde{\sigma}^* + \underline{f} = 0$ ) et vérifiant les conditions aux limites  $\tilde{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d$ ). La démonstration est tout à fait similaire à celle mise en œuvre pour le théorème de l'énergie potentielle. Elle s'appuie sur la propriété de convexité de  $W^*$  qui est acquise dès que  $W$  est convexe.

Explorons les conséquences de ce théorème dans le cas particulier du problème aux limites  $\mathcal{PS}$  posé sur le VER, pour lequel

$$\underline{T}^d = \underline{\Sigma} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.41)$$

On se restreint en outre au cas de constituants élastiques linéaires. Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{s} : \underline{\sigma} dV = \frac{1}{2} V \underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \leq \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^* : \underline{s} : \underline{\sigma}^* dV \quad (6.42)$$

On peut utiliser cette inégalité pour borner les propriétés élastiques effectives en choisissant des champs tests statiquement admissibles  $\tilde{\sigma}^*$ . Le choix le plus simple compatible avec les conditions aux limites du problème  $\mathcal{PS}$  est :

$$\tilde{\sigma}^* = \underline{\Sigma} \quad (6.43)$$

On choisit donc comme champ test le champ de contraintes homogène  $\underline{\Sigma}$  lui-même. Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \leq \underline{\Sigma} : \langle \underline{s} \rangle : \underline{\Sigma}, \quad \forall \underline{\Sigma} \quad (6.44)$$

Cette relation fournit une borne supérieure pour les propriétés effectives  $\underline{S}$  et par conséquent une borne inférieure pour les modules effectifs  $\underline{C}$ . Cette borne est l'inverse de la moyenne des propriétés locales  $\langle \underline{s} \rangle^{-1} = \langle \underline{c}^{-1} \rangle^{-1}$ . Elle est appelée borne inférieure de Reuss. Elle indique que quel que soit l'arrangement des phases au sein du matériau hétérogène, les souplesses effectives ne peuvent excéder la moyenne volumique des souplesses des constituants.

## 6.7 Application à l'élasticité isotrope

On considère le cas particulier d'un matériau hétérogène dont les constituants sont élastiques linéaires et isotropes. On suppose en outre que l'arrangement des phases est tel que le matériau résultant est isotrope au niveau macroscopique. La loi de comportement locale de chaque constituant s'écrit

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (6.45)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé ( $\mu$  module de cisaillement). On définit le module de compressibilité

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (6.46)$$

Les modules de cisaillement et de compressibilité effectifs sont notés  $\mu^{eff}$  et  $k^{eff}$  respectivement. On établit ici les bornes de Voigt et Reuss correspondantes. Considérons d'abord le champ de déformation test homogène

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

L'inégalité de Voigt s'écrit alors

$$\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = 9k^{eff} \leq \langle \langle 9k \rangle \rangle \quad (6.48)$$

Considérons ensuite le champ de contrainte test homogène

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

L'inégalité de Reuss s'écrit alors

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{3}{k^{eff}} \leq \langle \langle \frac{3}{k^{eff}} \rangle \rangle \quad (6.50)$$

On obtient finalement un encadrement du module de compressibilité effectif :

$$\langle \langle \frac{1}{k} \rangle \rangle^{-1} \leq k^{eff} \leq \langle \langle k \rangle \rangle \quad (6.51)$$

Dans le cas d'un matériau biphasé, en appelant 1 et 2 les deux phases et  $f, 1 - f$  les fractions volumiques correspondantes, la borne de Voigt s'écrit explicitement

$$\langle \langle k \rangle \rangle = fk_1 + (1 - f)k_2 \quad (6.52)$$

Considérons de même le champ de déformation test homogène

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

L'inégalité de Voigt s'écrit alors

$$\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = 4\mu^{eff} \leq \langle \langle 4\mu \rangle \rangle \quad (6.54)$$

Considérons ensuite le champ de contrainte test homogène

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

L'inégalité de Reuss s'écrit alors

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\mu^{eff}} \leq \langle \langle \frac{1}{\mu^{eff}} \rangle \rangle \quad (6.56)$$

On obtient finalement un encadrement du module de cisaillement effectif :

$$\langle \langle \frac{1}{\mu} \rangle \rangle^{-1} \leq \mu^{eff} \leq \langle \langle \mu \rangle \rangle \quad (6.57)$$

Ces inégalités montrent que les propriétés réelles sont comprises entre les moyennes arithmétiques et géométriques des propriétés des constituants, ce qui n'était pas du tout évident de prime abord. L'approche naïve consistant à estimer les propriétés par une simple moyenne ne permet donc que d'obtenir des bornes. On remarquera que ces bornes peuvent être atteintes au moins dans certaines directions particulières pour des composites stratifiés ou à fibres longues par exemple. Si toutes les fibres sont parallèles au sein d'une matrice isotrope, alors on vérifiera que les propriétés dans le sens des fibres sont données par la moyenne de Voigt. Au contraire, dans un laminé, on obtient la borne de Reuss en sollicitant dans la direction transverse normale aux couches.

## Résumé

- En conditions de déformations ou de contraintes homogènes aux contours, et en conditions périodiques, on montre :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}$$

On suppose que cela reste valable pour des conditions aux limites quelconques (lemme de Hill-Mandel)

- Tenseurs de concentration :

$$\text{Déformations} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}$$

$$\text{Contraintes} \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}}$$

- Tenseurs effectifs :

$$\text{Raideur} \quad \underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle$$

$$\text{Souplesse} \quad \underline{\underline{S}} = \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{s}} \rangle$$

- Bornes :

$$\text{Voigt} \quad \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{C}} - \langle \underline{\underline{c}} \rangle) : \underline{\underline{E}} \leq 0$$

$$\text{Reuss} \quad \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{S}} - \langle \underline{\underline{s}} \rangle) : \underline{\underline{\Sigma}} \leq 0$$

- Bornes en élasticité isotrope :

$$\text{Compressibilité} \quad \langle \frac{1}{k} \rangle^{-1} \leq k^{eff} \leq \langle k \rangle$$

$$\text{Cisaillement} \quad \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} \leq \mu^{eff} \leq \langle \mu \rangle$$

# Bibliographie

- [1] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, and S. Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Cours 1ère année, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [2] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *J. of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983.
- [3] Q.S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, 2000.