



# Mécanique des Matériaux Solides (EMP3122)

Georges Cailletaud

Centre des Matériaux  
Ecole des Mines de Paris/CNRS

## Déplacement déformation

- Le tenseur de déformation est la partie symétrique du gradient de déplacement

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

- Champ cinématiquement admissible :  $\underline{u} = \underline{u}^d$  sur  $\partial\Omega_u$
- Equations de compatibilité (ex : 6 composantes de déformation dérivent de 3 composantes de déplacement en coordonnées cartésiennes en 3D)

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} = 0$$

...et permutations circulaires, soit :

$$\varepsilon_{inm}\varepsilon_{jkk}\varepsilon_{ij,km} = 0$$

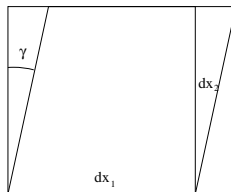
avec  $\varepsilon_{ijk} = 0$  si 2 indices sont égaux

$\varepsilon_{ijk} = 1$  si permutation paire,  $=-1$  si permutation impaire

# Signification géométrique des termes du tenseur de déformation

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii}$$

$$\gamma = 2\varepsilon_{12}$$



Les termes diagonaux désignent les allongements unitaires dans la direction des axes

Les termes hors diagonale caractérisent les rotations relatives des axes

- Allongement unitaire dans la direction définie par  $\underline{n}$

$$\delta(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{n} = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

# Contrainte

- Forces de volume :  $\underline{f}^d$  dans le volume  $\Omega$
- Forces de surface :  $\underline{F}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_F$
- Champ statiquement admissible :

- dans  $\Omega$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}^d = 0 \quad \sigma_{ij,j} + f_i^d = 0$$

- sur  $\partial\Omega_F$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \sigma_{ij} n_j = F_i^d$$

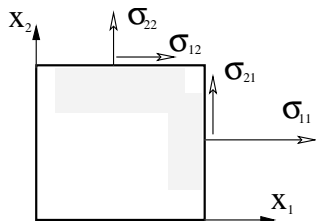
- Partie sphérique du tenseur de contrainte :

$$\underline{S} = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\sigma}) \underline{I} \quad S_{ij} = \frac{\sigma_{ll}}{3} \delta_{ij}$$

- Déviateur associé au tenseur de contrainte :

$$\underline{s} = \underline{\sigma} - \underline{S} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ll}}{3} \delta_{ij} \quad \text{trace}(\underline{s}) = s_{ll} = 0$$

# Signification physique des termes du tenseur de contrainte



- Les termes diagonaux caractérisent les efforts normaux aux facettes
- Les termes hors diagonale caractérisent les efforts de cisaillement

- Vecteur contrainte pour une facette de direction  $\underline{n}$

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

- Contrainte normale sur la facette de direction  $\underline{n}$

$$T_n(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

- Cisaillement dans une facette de direction  $\underline{n}$

$$\underline{T}_t(\underline{n}) = \underline{T} - T_n \underline{n} \quad T_t = \sqrt{T^2 - T_n^2}$$

# Travail des efforts intérieurs

- Théorème de Stokes pour une fonction scalaire  $f$  intégrée sur un volume  $\Omega$ ,  $\underline{n}$  étant la normale à  $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} f_{,j} dV = \int_{\partial\Omega} f n_j dS$$

- Travail des efforts intérieurs (champ de contraintes réel, champ de déplacement cinématiquement admissible)

$$\begin{aligned} -W_i &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u'_{i,j} dV \\ &= \int_{\Omega} ((\sigma_{ij} u'_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u'_i) dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u'_i n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u'_i dV \end{aligned}$$

# Travail des efforts extérieurs

- Travail des efforts extérieurs

$$W_e = \int_{\Omega} f_i^d u_i' dV + \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u_i' dS$$

- avec  $W_i + W_e = 0$ , il vient :

$$\text{dans } \Omega : \sigma_{ij,j} + f_i^d = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F : \sigma_{ij}n_j = F_i^d$$

- Ces relations sont *indépendantes du matériau*
- On introduit une *loi de comportement* en posant des relations entre contraintes et déformations

# Potentiel élastique

Le comportement, éventuellement non linéaire, est gouverné par un potentiel, qui sera défini par sa densité volumique, dont la forme dépend de la variable choisie

- Evolution entre deux états d'équilibre, avec  $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}$ , et  $\tilde{\varepsilon}' = d\tilde{\varepsilon}$ , le potentiel d'élasticité  $W(\tilde{\varepsilon})$  s'exprime, en élasticité linéaire :

$$W(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon} : \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{C}}} : \tilde{\varepsilon} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{C}}} : \tilde{\varepsilon}$$

- Evolution entre deux états d'équilibre, avec  $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon}$ , et  $\tilde{\sigma}^* = d\tilde{\sigma}$ , le potentiel d'élasticité complémentaire  $W^*(\tilde{\sigma})$  s'exprime, en élasticité linéaire :

$$W^*(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{S}}} : \tilde{\sigma} \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\partial W^*}{\partial \tilde{\sigma}} = \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{S}}} : \tilde{\sigma}$$

- $W$  et  $W^*$  convexes et  $dW + dW^* = d(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$

- Et : 
$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$$



# Elasticité linéaire

- Elasticité linéaire (rigidité et souplesse) :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma} \qquad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

- Relations de symétrie :

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} \qquad S_{ijkl} = S_{ijlk} = S_{jikl}$$

- Relations «énergétiques» :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad S_{ijkl} = S_{klij}$$

- Anisotropie générale = 21 coeff ; orthotropie = 9 coeff ; symétrie cubique = 3 coeff ; matériau isotrope = 2 coefficients
- Matériau isotrope :

$$\underset{\sim}{S} = 2\mu \underset{\sim}{\varepsilon}^{dev} \qquad \sigma_{//} = 3\kappa \varepsilon_{//}$$

# Elasticité isotrope

- Module de cisaillement  $\mu$  tel que  $\tau = \mu\gamma$
- Module de compressibilité  $\kappa$  tel que  $\bar{p} = \frac{1}{3}\sigma_{||} = \kappa \frac{\Delta V}{V}$
- Module de Young  $E$  tel que  $\sigma = E \varepsilon$  en traction simple
- Coefficient de Poisson  $\nu$  tel que  $\varepsilon_T = -\nu\varepsilon_L$  en traction simple ( $\varepsilon_T$ , déformation transverse,  $\varepsilon_L$ , déformation longitudinale)
- Contrainte en fonction des déformations

$$\underset{\sim}{\sigma} = \lambda \text{Tr} \underset{\sim}{\varepsilon} \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{||} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

- Déformations en fonction des contraintes

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underset{\sim}{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{I} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \varepsilon_{||} \delta_{ij}$$

# Relations entre les coefficients d'élasticité

- Expressions de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\kappa$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad 3\kappa = \frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu$$

- Expressions de  $E$  et  $\nu$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

- Typiquement :

$$\nu \approx 1/3 \quad 2\mu \approx 3E/4 \quad \kappa \approx E$$

- Caoutchouc :

$$\nu \approx 1/2 \quad \mu \approx E/3 \quad \kappa \gg E$$

# Traction simple

- Etat de contrainte uniaxial, de manière générale  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_0 \underline{n} \otimes \underline{n}$ ; par exemple dans un prisme d'axe  $x_1$ ,  $x_1$  étant la direction de traction, et les faces latérales étant libres :

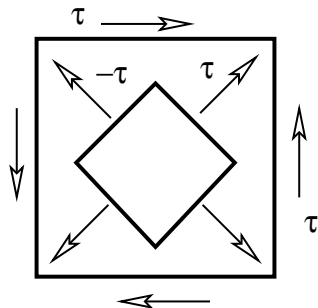
$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si la section vaut  $S_0$ , la force en direction  $x_1$  est :  $F = \sigma_0 S_0$
- Dans le repère  $x_1 x_2 x_3$ , le tenseur de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} := \begin{pmatrix} \sigma_0/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_0/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_0/E \end{pmatrix}$$

- Si la longueur est  $L_0$ , l'allongement en direction  $x_1$  est :  $\Delta L = \varepsilon L_0$
- La raideur du prisme vaut  $R = F/\Delta L = ES_0/L_0$

# Cisaillement simple



$$\tau = \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

- Chargement purement déviatorique
- Exemple du cisaillement pur dans le plan  $x_1 x_2$

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rotation de  $\pi/4$

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Flexion circulaire

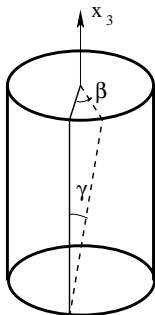
- Une seule composante au tenseur de contrainte, mais non uniforme dans l'espace :

$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Par exemple :  $\sigma_{11} = \frac{Mx_3}{I}$ , où  $M$  est le moment de flexion autour de  $x_2$ , et  $I = \int_S x_3^2 dS$  est le moment d'inertie de la section droite par rapport à  $x_2$
- Un prisme d'axe  $x_1$  qui subit ce chargement présente une rotation relative des sections caractérisée par un angle  $\theta$  tel que  $\theta_{,1} = \frac{M}{EI}$
- La déformation s'exprime en fonction de la courbure  $u_{3,11}$  par :  $\varepsilon_{11} = -x_3 u_{3,11}$
- Pour une section rectangulaire de hauteur  $h$  selon  $x_3$  et de largeur  $b$  selon  $x_2$  :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

# Torsion



- $\Gamma$  contour de la section
- Une génératrice devient une hélice

- Déplacements

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2 \quad u_2 = \alpha x_3 x_1 \quad u_3 = \alpha \phi(x_1, x_2)$$

- Contrainte

$$\sigma_{13} = \mu \alpha (\phi_{,1} - x_2) = \mu \alpha \theta_{,2} \quad (1)$$

$$\sigma_{23} = \mu \alpha (\phi_{,2} + x_1) = -\mu \alpha \theta_{,1} \quad (2)$$

$$\text{avec } \Delta \phi = 0 \quad \Delta \theta + 2 = 0 \quad \theta = 0 \text{ sur } \Gamma$$

- Moment de torsion :

$$M = \int_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dS$$

- Module de rigidité à la torsion :

$$D = 2\mu \int_S \theta dx_1 dx_2 = M/\alpha$$

## Torsion, section circulaire

- Pour un prisme circulaire de longueur  $L$ , et de rayon extérieur  $R_e$  :  $\beta = \alpha L$
- En surface extérieure  $\gamma = 2\varepsilon_{\theta z} = \alpha R$
- Contrainte de cisaillement  $\tau = \mu \alpha r$
- $\theta$  s'exprime simplement :  $\theta = \frac{1}{2}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$
- Une section perpendiculaire à  $x_3$  reste plane :  $\phi = 0$
- Tube de rayon int  $R_i$  et de rayon ext  $R_e$  :  $D = \mu \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$
- Tube mince de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$  :  $D = 2\mu\pi e R^3 = M/\alpha$  donc  

$$\alpha = \frac{\tau}{\mu R} = \frac{M}{2\pi\mu e R^3}, \text{ et } \tau = \frac{M}{2e\pi R^2}$$



# Coordonnées cylindriques

On se restreint aux exemples classiques pour lesquels :

- les déplacements sont portés par  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{u} = u_r \underline{e}_r$
- la seule force de volume éventuellement non nulle est  $f_r \underline{e}_r$ .

- Equilibre

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

- Déformation

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

soit :  $r\varepsilon_{\theta\theta,r} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}$

- Forces de volume nulles, rayon intérieur  $a$ , rayon extérieur  $b$

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$u_r = Cr + D/r$$

# Cylindre sous pression

- Tube sous pression, pression intérieure  $p_i$ , pression extérieure  $p_e$

$$A = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

- Cylindre plein ( $p_i = 0$ ,  $a = 0$ ,  $p_e = p$ ),

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p$$

- Pression interne ( $p_i = p$ ,  $a, b$ ),

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p$$

- Tube mince sous pression interne  $p$ , rayon  $R$ , épaisseur  $e$ ,

$$\sigma_{rr} \text{ négligeable} \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/e$$

# Coordonnées sphériques

On se restreint aux exemples classiques pour lesquels :

- les déplacements sont portés par  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{u} = u_r \underline{e}_r$
- la seule force de volume éventuellement non nulle est  $f_r \underline{e}_r$ .

- Equilibre

$$\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

- Déformation

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

soit :  $r\varepsilon_{\theta\theta,r} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}$

- Forces de volume nulles, rayon intérieur  $a$ , rayon extérieur  $b$

$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3} \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$u_r = Cr + D/r^2$$

# Sphère sous pression

- Sphère sous pression, pression intérieure  $p_i$ , pression extérieure  $p_e$

$$A = \frac{p_i a^3 - p_e b^3}{b^3 - a^3} \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)}$$

- Sphère pleine ( $p_i = 0$ ,  $a = 0$ ,  $p_e = p$ ),

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = p$$

- Pression interne ( $p_i = p$ ,  $a, b$ ),

$$\sigma_{rr} = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left( 1 - \frac{b^3}{r^3} \right) p \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left( 1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) p$$

- Tube mince sous pression interne  $p$ , rayon  $R$ , épaisseur  $e$ ,

$$\sigma_{rr} \text{ négligeable} \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/2e$$