

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments de Mécanique de la rupture</b>	<b>3</b>
1.1	Généralités . . . . .	3
1.2	Taux de restitution d'énergie . . . . .	4
1.2.1	Définition . . . . .	4
1.2.2	Cas d'une charge ponctuelle . . . . .	4
1.2.3	Quelques valeurs critiques de $G$ . . . . .	5
1.3	Facteur d'intensité de contrainte . . . . .	6
1.3.1	Solution de Muskhelishvili . . . . .	6
1.3.2	Solution asymptotique de Westergaard . . . . .	6
1.3.3	Différents modes de sollicitation . . . . .	7
1.3.4	Remarques . . . . .	7
1.4	Analyse de l'état de contrainte tridimensionnel . . . . .	9
1.5	Propagation de fissure en fatigue . . . . .	10
1.5.1	Amorçage–propagation dans les matériaux métalliques . . . . .	10
1.5.2	Loi de Paris . . . . .	12



# Chapitre 1

## Éléments de Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures macroscopiques : elle s'applique lorsqu'il existe dans le matériau des discontinuités telles dans la matière qu'elles viennent modifier l'état de contrainte, déformation et déplacement, si bien que l'homogénéisation du milieu n'a plus de sens.

### 1.1 Généralités

La séparation en deux parties disjointes d'un corps se produit à la suite de la phase d'amorçage, qui a vu le développement de microcavités, microfissures... sous l'action de sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques.... La propagation de la ou des fissures macroscopiques peut conduire à la séparation complète de plusieurs morceaux, ou bien au contraire les fissures peuvent s'arrêter. Le mode de rupture peut être fragile, la rupture se produisant alors souvent sans déformation plastique, ou ductile, en présence d'une déformation plastique importante. L'énergie nécessaire pour produire la rupture, caractérisée par la *résilience* (rapport de l'énergie nécessaire pour rompre une pièce sur la section droite de matière rompue), est bien plus grande dans le cas de la rupture ductile. La résilience est une caractéristique importante du matériau au niveau de la conception de systèmes mécaniques. Elle évolue avec la température, la *température de transition* caractérisant le passage d'un mode à l'autre. Le mode de rupture dépend par ailleurs de l'état de contrainte, en particulier de la triaxialité des contraintes (rapport du premier sur le second invariant). Un matériau qui présente beaucoup de plasticité développera en général des ruptures ductiles, mais pourra être sujet à la rupture fragile. Un matériau sans plasticité (céramiques, métaux à très basses températures, certaines résines) présentera toujours des ruptures fragiles.

En fonction du chargement et du matériau considérés, si le milieu est globalement plastique ou viscoplastique, l'étude est du ressort de la mécanique non linéaire de la rupture, ou encore de l'*approche locale*, dans laquelle il est fait une description aussi précise que possible de l'état de contrainte et de déformation en pointe de fissure à l'aide de modèles de comportement non linéaires. Si au contraire la plasticité est absente ou reste très confinée, les théories qui permettent de traiter le problème considèrent le matériau comme élastique partout : c'est la *mécanique linéaire de la rupture*, qui va être considérée dans ce chapitre.

Les dates principales qui marquent le développement de la mécanique de la rupture sont 1920, lorsque Griffith montre que la rupture d'un milieu élastique-fragile peut être caractérisée par une variable globale, qui sera appelée plus tard le taux de restitution d'énergie, et 1956, lorsque, à partir de l'étude des singularités du champ de contrainte, Irwin introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes. Les années 1960-1980 sont celles de l'essor puis de la maturité de la mécanique de la rupture, avec en particulier les développements numériques et le traitement des problèmes non linéaires.

## 1.2 Taux de restitution d'énergie

### 1.2.1 Définition

Dans le cas où l'énergie cinétique est négligée, la puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface  $\mathcal{A}$  est égale à la variation de l'énergie potentielle totale  $\mathcal{V}$ , résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie liée aux forces extérieures. Cette contribution mécanique est appelée *taux de restitution d'énergie*. Elle peut se définir quel que soit le type de comportement. Son unité est le joule/m<sup>2</sup>.

$$G = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{A}} \quad (1.1)$$

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant  $\gamma^s$  l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité :

$$\text{--propagation si :} \quad G - 2\gamma^s \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\text{--arrêt si :} \quad 0 \geq G - 2\gamma^s \quad (1.3)$$

Si le matériau est élastique, et dans le cas où les forces de volume sont négligées, l'expression de l'énergie potentielle se réduit à deux termes, le premier correspondant à l'énergie de déformation élastique (dans le volume  $V$  du solide), le second au travail des forces extérieures appliquées en surface, (force  $\underline{F}^d$  sur les frontières où la force est imposée  $S_F$ ) :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS \quad (1.4)$$

L'application du théorème de la divergence au terme volumique permet de le transporter en surface (théorème "du travail"), le terme obtenu se partageant ensuite sur les surfaces à force et déplacement imposés ( $\underline{u}^d$ ) :

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_S \underline{F} \cdot \underline{u} dS = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS \quad (1.5)$$

Le calcul de  $G$  s'effectue par simple dérivation à partir de la nouvelle expression de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS - \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS \quad (1.6)$$

et :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Cas d'une charge ponctuelle

Dans le cas particulier où il n'y a qu'une charge ponctuelle, les expressions se simplifient en introduisant la raideur  $\mathcal{R}$  de la structure ou sa complaisance  $\mathcal{C}$ . La force  $\mathcal{F}$  et le déplacement  $\mathcal{U}$  deviennent alors ponctuels, et :  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \mathcal{U}$  ;  $\mathcal{U} = \mathcal{C} \mathcal{F}$ . L'avancée de fissure peut se schématiser comme en figure 1.1, selon que l'avancée se fait à déplacement imposé (Fig.1.1a), ou à force imposée (Fig.1.1b).

Dans chaque cas l'expression de  $G$  devient :

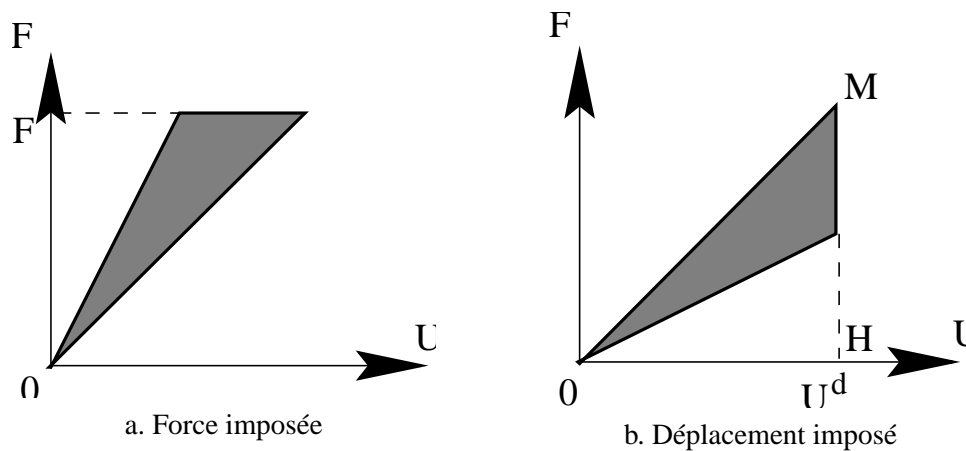


FIG. 1.1 – Evaluation de l'énergie mise en jeu lors d'une avancée de fissure

- à déplacement imposé, comme  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \mathcal{U}^d$  :

$$G = -\frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS \quad (1.8)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} \mathcal{U}^d \right) \cdot \mathcal{U}^d = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}^2} \right) \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

- à force imposée, comme  $\mathcal{U} = C \mathcal{F}^d$  :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}^d \cdot \left( \frac{dC}{d\mathcal{A}} \mathcal{F}^d \right) \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

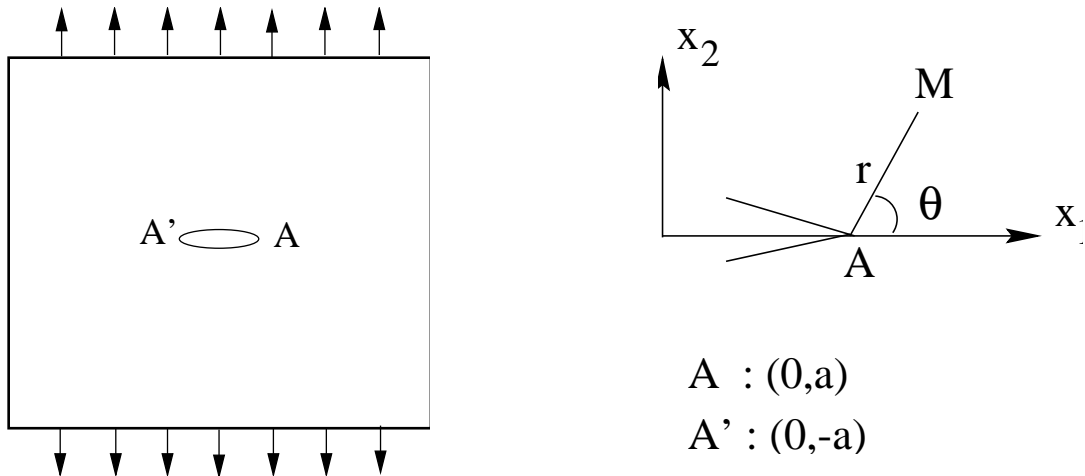
Les deux cas aboutissent formellement à la même expression :

$$G = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{dC}{d\mathcal{A}} \quad (1.14)$$

Il faut noter néanmoins que l'évolution de la force n'est pas la même (chute de force lors de l'avancée de fissure à déplacement imposé, la structure devenant plus souple, et bien entendu force constante à force imposée, avec augmentation du déplacement résultant). L'énergie récupérable dans le cas du déplacement imposé est finie (égale à l'aire du triangle  $OMH$ ), si bien que  $G$  va décroître avec la progression de fissure, et que la fissure pourra éventuellement s'arrêter. Ces expressions sont utilisées pour mesurer expérimentalement  $G$ .

### 1.2.3 Quelques valeurs critiques de $G$

Le verre et les céramiques ont des valeurs très faibles du taux de restitution d'énergie critique, de l'ordre de  $10 \text{ J/m}^2$ . Viennent ensuite les résines fragiles, avec des valeurs de l'ordre de  $100$  à  $500 \text{ J/m}^2$ . Les composites verre-résine possèdent des valeurs de l'ordre de  $7000 \text{ J/m}^2$ , ce qui les place au voisinage des alliages d'aluminium ( $20000 \text{ J/m}^2$ ). Les matériaux les plus résistants à la déchirure sont les aciers ( $100 \text{ kJ/m}^2$ ), et, bien entendu, les métaux purs ( $100$ – $1000 \text{ kJ/m}^2$ ).

FIG. 1.2 – Plaque infinie en traction simple selon  $x_2$ 

### 1.3 Facteur d'intensité de contrainte

Sauf mention contraire, les développements des chapitres suivants concernent des milieux bidimensionnels. La fissure y sera linéaire, définie par sa longueur  $a$ . En toute rigueur, l'extension en tridimensionnel n'est possible que si le front de fissure dans la pièce réelle est perpendiculaire au plan d'étude, et alors :  $\mathcal{A} = ab$ ,  $b$  étant l'épaisseur de la pièce.

#### 1.3.1 Solution de Muskhelishvili

La figure 1.2 montre le système qui est considéré ici. Il s'agit d'un panneau "infini", contenant une fissure de longueur  $2a$  selon l'axe  $x_1$ , et sollicité en traction uniforme selon l'axe  $x_2$ . Dans la pratique, un modèle de ce type pourra être raisonnablement utilisé dès lors que les dimensions de la fissure seront de 10 à 20 fois plus faibles que celle de la plaque. Il existe une solution analytique exacte de ce problème, sur l'axe  $x_2 = 0$ , en supposant un état de contraintes planes :

$$- \text{Si } x_1 \geq a \quad \sigma_{22} = \sigma_{\infty} / (1 - (a/x_1)^2)^{1/2} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{\infty} \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{22} = \left( \frac{\sigma_{\infty}}{E} \right) \left( \nu + \frac{1 - \nu}{(1 - (a/x_1)^2)^{1/2}} \right) \quad (1.16)$$

$$- \text{Si } 0 \leq x_1 \leq a \quad [u_2] = 2u_2 = \left( \frac{4a\sigma_{\infty}}{E} \right) (1 - (x_1/a)^2)^{1/2} \quad (1.17)$$

La formule du déplacement  $u_2$  sur la frontière de la fissure montre que l'ouverture des lèvres de la fissure est représentée par une ellipse. La changement de variable  $x_1 = a + r$  montre qu'il existe au voisinage de la pointe de fissure une singularité en  $r^{1/2}$  lorsque  $r$  tend vers 0.

$$\sigma_{22} \propto \sigma_{\infty} (a/2r)^{1/2} \quad (1.18)$$

#### 1.3.2 Solution asymptotique de Westergaard

Le problème précédent peut également être abordé en introduisant la "fonction d'Airy"  $\Psi(x_1, x_2)$  telle que :  $\sigma_{11} = \Psi_{,22}$ ;  $\sigma_{22} = \Psi_{,11}$ ;  $\sigma_{12} = \Psi_{,12}$ . Les équations d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées.

En élasticité linéaire, le report de ces égalités dans les conditions de compatibilité  $2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{22,22}$  conduit à chercher  $\Psi$  comme solution de l'équation biharmonique  $\Delta\Delta\Psi = 0$ . Ce problème se résout par la méthode des fonctions complexes. On obtient ainsi la solution asymptotique au voisinage de la pointe de fissure (Fig.1.3). Irwin a montré que le premier terme du développement limité est le même, à un facteur multiplicatif près, pour tous les problèmes correspondant à un mode d'ouverture donné. La sollicitation d'une fissure linéaire dans un milieu plan perpendiculairement à son axe correspond au mode I; on introduit ainsi le *facteur d'intensité de contrainte en mode I*,  $K_I$ , tel que :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right) \quad (1.19)$$

### 1.3.3 Différents modes de sollicitation

Le chargement étudié jusqu'à présent fait intervenir un champ de contrainte "lointain" comportant une seule composante, normale à la direction de la fissure, il s'agit du mode d'ouverture, ou mode I. C'est celui qui est physiquement le plus important, puisqu'une fissure en mode I se propage dans son propre plan, par raison de symétrie, sans bifurcation, l'ouverture de la fissure conduisant facilement à la rupture. Dans le cas du mode II, le champ lointain de sollicitation extérieure est un cisaillement perpendiculaire au front de fissure (Fig.1.3.b), et dans le cas du mode III un cisaillement parallèle au front de fissure (Fig.1.3.c).

### 1.3.4 Remarques

1. L'unité de  $K$  est le  $N.m^{-3/2}$ . On utilise couramment le  $MPa.\sqrt{m}$ .  $K$  dépend à la fois du matériau et de la géométrie.
2. La singularité en  $r$  permet à l'énergie de déformation élastique de rester finie en pointe de fissure (le matériau ne devient pas localement indéformable) :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV \propto \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} r dr d\theta \quad (1.35)$$

3. La comparaison de la solution précédente en  $\theta = 0$  et de la solution de Muskhelishvili lorsque  $r$  tend vers 0 fournit l'expression de  $K_I$  pour une fissure horizontale de longueur  $2a$  chargée selon  $x_2$  à l'infini avec une contrainte  $\sigma_\infty$  :

$$\text{Westergaard : } \sigma_{22} \propto \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad ; \quad \text{Muskhelishvili : } \sigma_{22} \propto \sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (1.36)$$

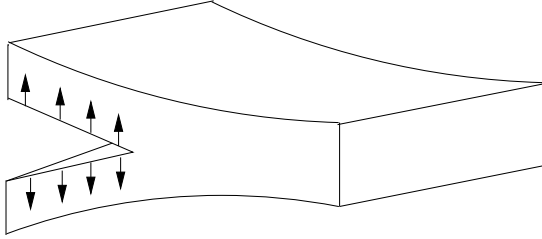
$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.37)$$

4. Il ne faut pas confondre  $K_I$  avec  $K_t$  *facteur de concentration de contrainte*, qui est sans dimension, et qui caractérise le rapport entre la contrainte normale maximale et la contrainte à l'infini au voisinage d'une entaille. Ainsi, au voisinage d'un défaut elliptique de longueur  $2a$  et de rayon de courbure  $\rho$  le facteur de concentration de contrainte vaut :

$$K_t = \sigma_{22max} / \sigma_\infty = 2\sqrt{a/\rho} \quad (1.38)$$

Cette valeur peut se retrouver à l'aide de la solution de Muskhelishvili pour un trou elliptique. La valeur de  $K_t$  devient infinie lorsque le rayon  $\rho$  tend vers 0, ce qui n'est bien sûr pas le cas de  $K_I$ .

5. En mode I, il est possible de trouver la relation entre  $K$  et  $G$  en évaluant le travail nécessaire pour refermer une fissure de longueur  $a + \Delta a$ , comme indiqué en figure 1.4. Il s'agit d'exprimer que la densité d'effort sur le segment  $OO'$  passe de 0 lorsque la fissure est en  $O'$  à  $\sigma_{22}$  lorsque la



a. Mode I : ouverture

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.20)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.21)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (1.22)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.23)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.24)$$

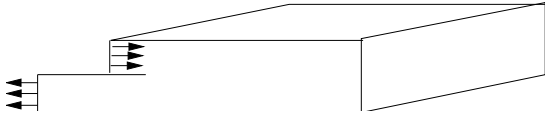
$$\text{avec : } \kappa = 3 - 4\nu \text{ en déformations planes} \quad (1.25)$$

$$\text{et : } \kappa = \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \text{ en contraintes planes} \quad (1.26)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.27)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.28)$$

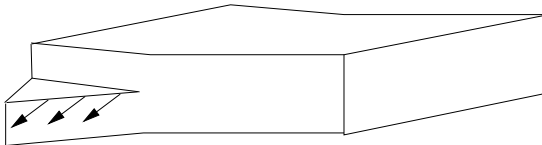
$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1.29)$$



b. Mode II : glissement dans le plan

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.30)$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.31)$$



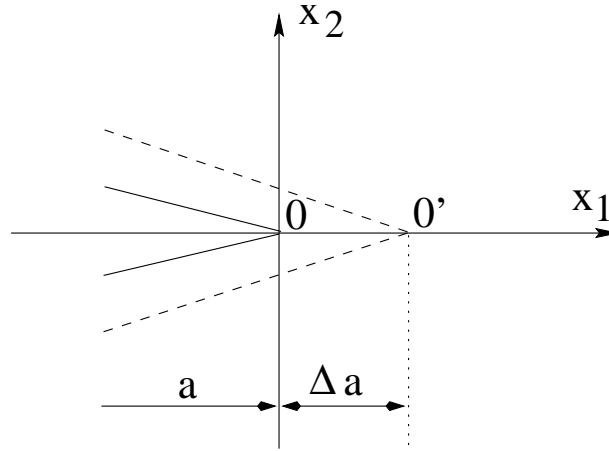
c. Mode III : glissement antiplan

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.32)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.33)$$

$$u_3 = -\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.34)$$



FIG. 1.4 – Opération de refermeture de fissure pour le calcul de la relation  $K-G$ 

fissure est en  $O$ , alors que dans le même temps l'ouverture passe de  $u_2$  à 0. Le résultat obtenu est :  $G = K_I^2(k+1)/8\mu$  avec  $k = 3 - 4\nu$  en déformations planes, et  $k = (3 - \nu)/(1 - \nu)$  en contraintes planes, soit :

$$\text{Contraintes planes : } G = K_I^2/E \quad (1.39)$$

$$\text{Déformations planes : } G = (1 - \nu^2)K_I^2/E \quad (1.40)$$

Pour effectuer la démonstration des formules précédentes, le taux de restitution d'énergie est pris sous la forme :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS \quad (1.41)$$

Le calcul consiste à évaluer, par unité d'épaisseur :

$$G \cdot \Delta a = \frac{1}{2} \int_a^{a+\Delta a} \sigma_{22}(O) u_2(O') dx_1 \quad (1.42)$$

Par ailleurs, les relations générales sont, en cas de mélange des modes :

$$\text{Contraintes planes : } G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad (1.43)$$

$$\text{Déformations planes : } G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad (1.44)$$

6. Dans le cas des matériaux anisotropes, il existe un couplage entre les différents modes même pour les configurations les plus simples, comme la plaque en traction étudiée précédemment. On définit alors un tenseur de facteurs d'intensité de contraintes :

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r} \quad (1.45)$$

## 1.4 Analyse de l'état de contrainte tridimensionnel

Après avoir examiné le problème d'élasticité bidimensionnelle, il est utile de considérer l'état de contrainte 3D qui s'établit dans les structures.

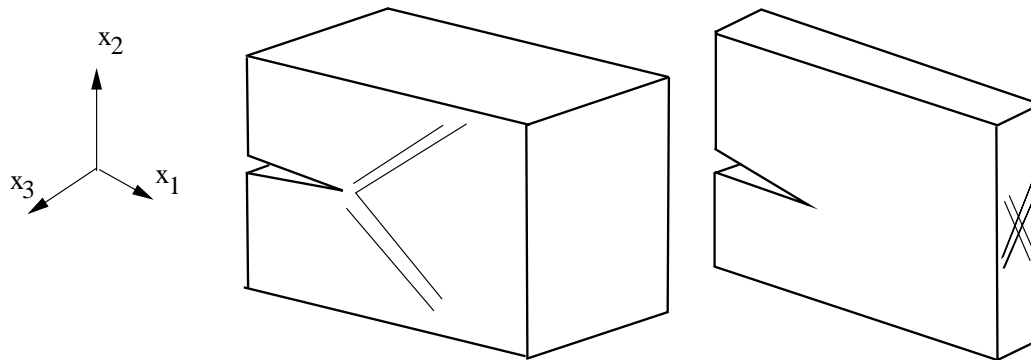


FIG. 1.5 – Etat de contrainte tridimensionnel en pointe de fissure

- Dans les structures épaisses (exemple de l'éprouvette de la figure 1.5.a), l'état de contrainte est triaxial, et  $0 < \sigma_{11} < \sigma_{33} < \sigma_{22}$ . Les directions de glissement préférentielles sont donc dans le plan de cisaillement maximum,  $x_1 - x_2$ , si bien que l'éprouvette périt "par l'arrière" de la fissure.
- Dans les structures minces (exemple de l'éprouvette de la figure 1.5.b), la composante 33 du tenseur de contrainte est négligeable ( $0 < \sigma_{33} < \sigma_{11} < \sigma_{22}$ ), si bien que le plan de cisaillement maximum est maintenant le plan  $x_2 - x_3$ , et que l'épaisseur de la structure va diminuer au devant de la fissure, provoquant la ruine par amincissement exagéré.

## 1.5 Propagation de fissure en fatigue

### 1.5.1 Amorçage–propagation dans les matériaux métalliques

Le phénomène de fatigue se manifeste sur les matériaux soumis à des chargements de faible intensité, qui individuellement ne présenteraient pas de danger, mais qui, appliqués de façon cyclique, conduisent à l'amorçage puis à la propagation de fissures, d'abord microscopiques, puis macroscopiques. La figure 1.6 schématise ce processus, dans un diagramme où la vitesse de propagation par cycle est reportée en fonction de la longueur de la fissure.

Comme indiqué en introduction, les fissures courtes sont noyées dans des champs locaux, imposés par les efforts extérieurs et la géométrie locale (cristallographie par exemple), et leur étude individuelle n'est pas aisée. Celles qui sont observées lors d'une étude microstructurale sont celles qui ont progressé de façon préférentielle, donc qui se trouvaient dans les zones les plus sollicitées. Il est donc normal que, dans le diagramme ( $da/dN-a$ ), elles présentent des vitesses grandes. Certaines d'entre elles s'arrêtent, tandis qu'un petit nombre (en général une seule) dépasse la taille de la microstructure, pour devenir une "grande" fissure, qui peut être étudiée à l'aide de la mécanique linéaire de la rupture.

La zone de non-propagation peut se représenter également dans un diagramme ( $\log \sigma - \log a$ ), dit de Kitagawa (Fig.1.7). La partie horizontale de la frontière du domaine correspond à la *limite d'endurance*, ou *limite de fatigue*. Il s'agit du niveau de contrainte cyclique en dessous duquel aucune micro-fissure ne se développera. Une structure sans défaut macroscopique, ou une éprouvette lisse soumise à ce type de chargement ne présenteront pas de risque de rupture. Pour des longueurs de fissure plus importantes, la structure résistera d'autant moins bien que la fissure sera longue, la frontière du domaine présentant alors une pente  $-1/2$ , ce qui est cohérent avec le fait que c'est l'amplitude de facteur d'intensité de contrainte,  $\Delta K \propto \Delta \sigma a^{1/2}$  qui est le moteur de l'avancée de fissure. De même qu'il existe une limite d'endurance, il est possible de définir un *facteur d'intensité de contrainte seuil* en dessous duquel la fissure ne progresse pas.

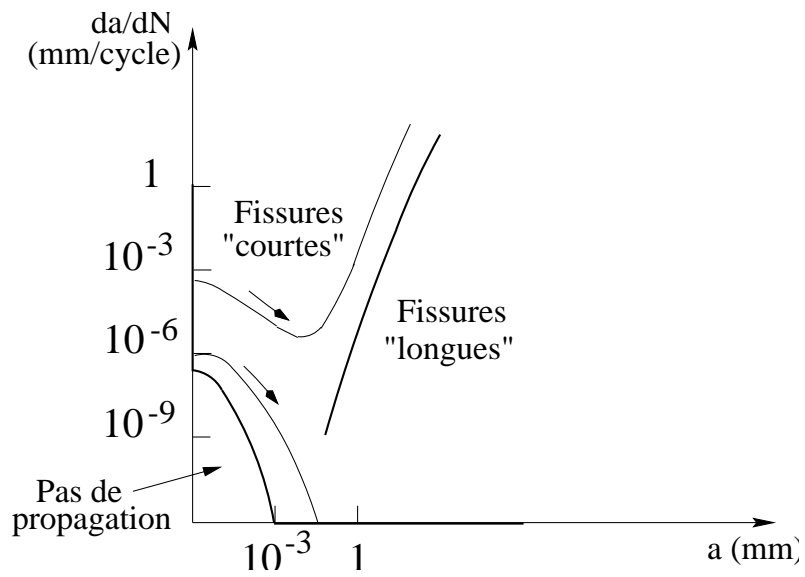


FIG. 1.6 – Schématisation de la propagation de fissures de fatigue

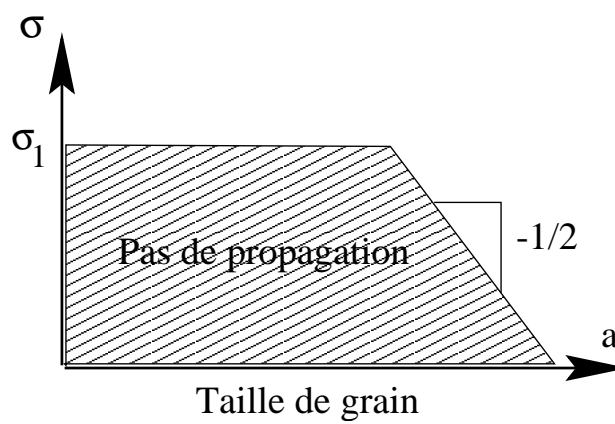
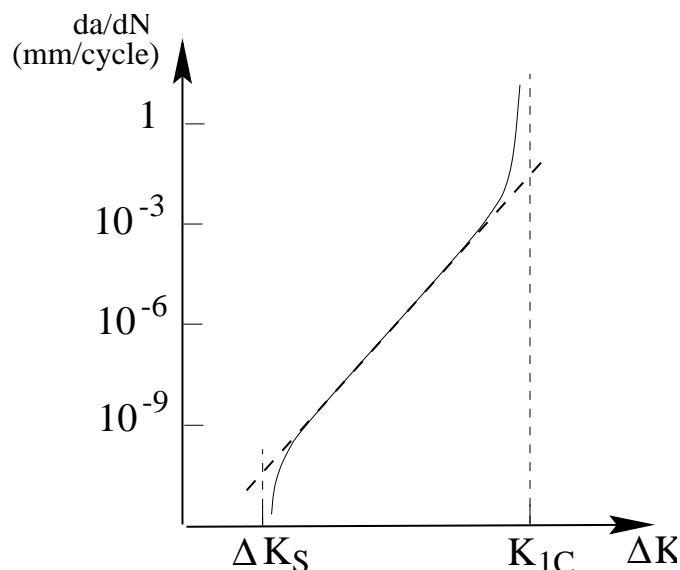


FIG. 1.7 – Diagramme définissant les limites de fatigue et de propagation de fissure

FIG. 1.8 – Illustration de la loi de Paris dans le diagramme  $da/dN-\Delta K$ 

Matériau	$K_{Ic}$ ( $MPa\sqrt{m}$ )	$\Delta K_s$ ( $MPa\sqrt{m}$ )
acier haute résistance (ex : 35NCD16)	60	1 à 4
acier moyenne résistance (ex : 15MND6) ...		
... (basse température)	40	3
... (palier ductile)	200	8
alliages d'aluminium (ex : 7075)	30	1,5 à 4
alliages de titane (ex : TA6V)	80	2 à 8
composite verre-résine	7	
polyéthylène	6,5	
polystyrène	0,4	
résine époxyde	0,1	
verre	0,01	

TAB. 1.1 – Valeur critique et valeur seuil du facteur d'intensité de contrainte pour quelques matériaux

### 1.5.2 Loi de Paris

Les courbes  $da/dN-\Delta K$  présentent la forme indiquée en figure 1.8. En régime établi, elles présentent une partie linéaire dans un diagramme log-log, ce qui permet de les modéliser par la loi de Paris, qui définit la vitesse de propagation par cycle comme une fonction puissance de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (1.46)$$

Dans le même diagramme est également reportée la valeur de  $K_{Ic}$ , qui correspond à une rupture instantanée, par dépassement de la valeur critique de  $K$  sous chargement monotone. Le tableau 1.1 fournit donc, en même temps que  $K_s$ , quelques valeurs typiques de  $K_{Ic}$  pour les alliages usuels, auxquelles sont ajoutées pour comparaison celles qui sont classiquement obtenues pour des matériaux non métalliques (valeurs en  $MPa \cdot \sqrt{m}$ ).

## Résumé

- Taux de restitution d'énergie, défini à partir de la variation d'énergie potentielle

$$G = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS$$

- Charge ponctuelle, à déplacement imposé

$$G = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}^2} \right) \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}}$$

- Charge ponctuelle, à force imposée

$$G = \frac{1}{2} \mathcal{F}^d \cdot \left( \frac{dC}{d\mathcal{A}} \mathcal{F}^d \right)$$

- Facteur d'intensité de contrainte en mode I

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right)$$

- ... pour une fissure de longueur  $2a$  dans une plaque infinie

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

- Relation  $G-K$

- ★ En contraintes planes

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$$

- ★ En déformations planes

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$$

- ★ Unité de  $G = \text{J.m}^{-2}$  ; unité de  $K = \text{Pa.m}^{1/2} = \text{N.m}^{-3/2}$

- Loi de Paris

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m$$