

## Etude du comportement mécanique du gypse



Fig.1 : Dispositif expérimental pour un essai de compression uniaxiale

Les essais mécaniques réalisés en laboratoire sur des éprouvettes homogènes constituent le principal outil de détermination des lois de comportement des solides en général et des géomatériaux en particulier. En mécanique des roches et des sols, les données expérimentales utilisées pour définir ces lois de comportement proviennent d'essais triaxiaux classiques ou d'essais spéciaux, de type œdométrique ou de type brésilien. Dans ce mini-projet, on se limitera à un essai de compression uniaxiale (essai triaxial avec un confinement nul) et à un essai brésilien qui permet la mesure, d'une façon indirecte, de la résistance à la traction. Les essais seront réalisés sur des éprouvettes de gypse.

### Résistance en compression uniaxiale

Dans cet essai, l'éprouvette, généralement cylindrique, est placée entre les plateaux d'une presse (figure 1), et la force axiale est augmentée jusqu'à la rupture de l'éprouvette. La valeur maximale  $F$  de la force permet de calculer la résistance en compression uniaxiale  $R_c$  de la roche :  $R_c = F/S$  avec  $S$  est la surface de la section de l'éprouvette.

### Résistance à la traction

L'essai de résistance à la traction indirecte, dit aussi essai brésilien, est réalisé en comprimant entre les plateaux de la presse une éprouvette cylindrique le long de deux génératrices opposées (figure 2) : la rupture est obtenue par traction au centre de l'éprouvette. On évite ainsi les difficultés de collage des têtes nécessaire dans les essais de traction directe. Si  $F$  est l'effort fourni par la presse au moment de la rupture,  $R$  le rayon de l'éprouvette et  $H$  sa hauteur, la résistance à la traction indirecte est donnée par :  $R_t = (F/\pi RH)$ .

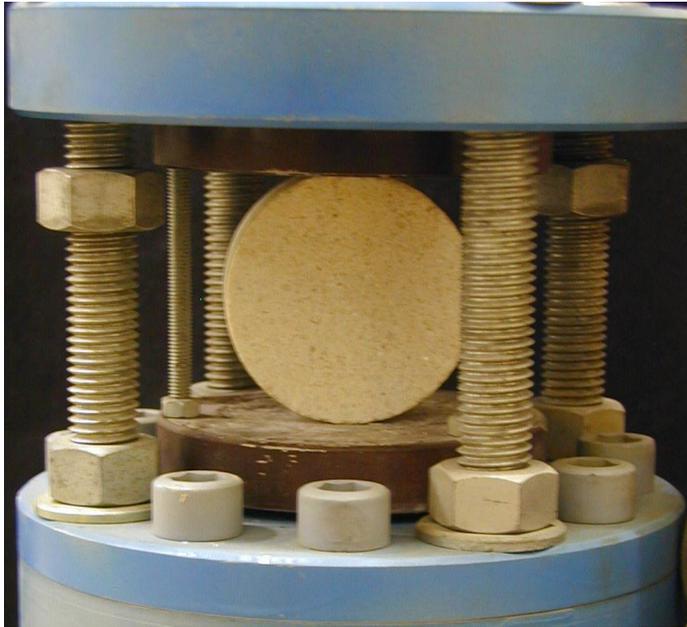


Fig.2 : Essai de traction indirecte (essai brésilien)

## Travail demandé

1. L'homogénéité de l'éprouvette est un facteur important qui permet de déterminer un comportement moyen de la roche étudiée à partir de mesures faites sur ses frontières. Qu'en est-il de l'homogénéité des éprouvettes de gypse ?
2. Si l'on suppose la déformation homogène et le matériau isotrope, les mesures de la force axiale, de la hauteur et du diamètre de l'éprouvette permettent de déterminer entièrement l'état de contrainte et de déformation. Dans quelle mesure cette homogénéité est-elle assurée ?
3. Réaliser l'essai de compression simple avec le dispositif expérimental fourni et tracer la courbe contrainte-déformation pour chaque éprouvette. En déduire la résistance en compression simple pour chaque éprouvette. La résistance en compression simple est une propriété assez dispersée ; qu'en est-il des valeurs trouvées pour le gypse ?
4. La mesure des déformations lors d'une compression uniaxiale permet de déterminer les paramètres élastiques de déformabilité de la roche : module de Young (pente de la courbe de déformation longitudinale) et coefficient de Poisson (rapport de la déformation transversale à la déformation longitudinale). Déterminer le module de Young de chaque éprouvette.
5. Lorsque les déformations sont mesurées à partir des déplacements des plateaux de la presse (mesures dites globales), la machine et l'échantillon se déforment au fur et à mesure que la charge augmente, qu'en est-il donc du vrai module de Young et dans quelle mesure peut-on dire que ce qu'on a déterminé comme paramètre est vraiment intrinsèque à la roche ?
6. Réaliser l'essai de traction brésilien et déterminer la résistance à la traction pour chaque éprouvette.
7. Le critère de rupture le plus utilisé pour les géomatériaux isotrope est celui de Mohr-Coulomb. A partir des valeurs moyennes de la résistance en compression simple et celle à la traction, déterminer les deux paramètres qui caractérisent ce critère, à savoir, l'angle de frottement et la cohésion. Un essai de traction indirecte est caractérisé par les contraintes principales  $\sigma_1 = R_t$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -kR_c$  et on appliquera le coefficient  $k$  trouvé en annexe. Dans le cas de la compression uniaxiale on a :  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  et  $\sigma_3 = -R_c$
8. A la fin de chaque essai, observer l'orientation de la surface de rupture et la justifier.

## Annexe : Calcul numérique de la solution élastique de l'essai brésilien

Le traitement des problèmes qui comportent une ou plusieurs zones de contact est toujours délicat, car la définition des conditions aux limites pose toujours question. Par ailleurs, les contacts sont souvent à la source de grandes concentrations de contrainte sur des zones très réduites. Dans le cas du système étudié ici, les conditions sont favorables dans la mesure où l'on s'intéresse à l'état de contrainte d'une zone (le centre du cylindre) qui est éloignée de la zone de contact. C'est cependant l'occasion d'étudier la distribution des contraintes dans la structure, et de juger de l'homogénéité du champ au centre du cylindre.

Trois approches sont utilisées, deux approches analytiques et une approche de simulation numérique. Les deux approches analytiques sont :

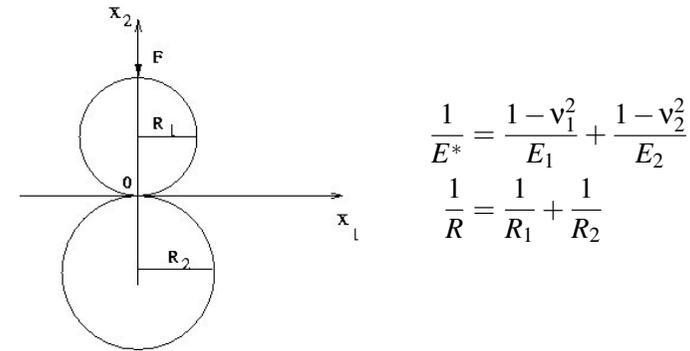
- la solution de Hertz, que l'on peut par exemple trouver dans [2]
- la solution de Muskhelishvili, que l'on trouve dans [1]

La simulation numérique met en œuvre une technique de calcul par éléments finis.

### Solution de Hertz

Hertz a fourni des solutions de problèmes de contacts entre corps élastique. Les solutions les plus connues concernent deux cylindres ou deux sphères, qui peuvent avoir des rayons différents, et qui sont en contact le long d'une génératrice. Pour une force d'appui donnée, la théorie de Hertz fournit la taille de la zone de contact,  $a$ , qui évolue comme la racine carrée de la force, la pression normale sous le contact, et les contraintes normales principales à l'intérieur des cylindres dans le plan de symétrie défini par la génératrice et le segment qui joint les centres des sections.

La figure ci-dessous précise la géométrie et les notations utilisées.



$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Les  $R_i$  sont les rayons de chaque cylindre,  $E_i$  les modules de Young et  $\nu_i$  les coefficients de Poisson. La surface de contact  $a$  et la pression maximale de contact  $F_0$  peuvent être calculées grâce aux relations :

$$a = \left( \frac{4FR}{\pi E^*} \right)^{1/2} \quad F_0 = \frac{2F}{\pi a}$$

Les contraintes principales suivant l'axe  $x_2$ , i.e  $x_1 = 0$  sont données par les relations suivantes ([2]) :

$$\sigma_1 = -F_0 \left\{ \left( 1 + 2 \left( \frac{x_2}{a} \right)^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{x_2}{a} \right)^2 \right)^{-1/2} - 2 \left( \frac{x_2}{a} \right) \right\}$$

$$\sigma_2 = -F_0 \left( 1 + \left( \frac{x_2}{a} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ dans le cas des déformations planes.}$$

### Solution analytique

L'essai brésilien admet une solution analytique, qui a été établie par Muskhelishvili. La démarche permettant de déterminer cette solution est

présentée dans [1]. Il n'y a plus deux cylindres en jeu cette fois-ci ; l'auteur considère plutôt une force appliquée ponctuellement selon la génératrice d'un cylindre. Sur l'axe  $x_1 = 0$ , les contraintes s'écrivent alors :

$$\sigma_{11} = -\frac{F}{H\pi R}$$

$$\sigma_{22} = \frac{F}{H\pi R} \frac{3R^2 + x_2^2}{R^2 - x_2^2}$$

## Calcul éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique permettant de résoudre des problèmes de physique ou plus généralement des équations différentielles avec conditions aux limites, et pas seulement des problèmes de mécanique !

La méthode consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ défini par morceaux sur des sous domaines.

La résolution d'un problème par éléments finis se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, on procède à la division du domaine d'étude en sous domaines : c'est le maillage. Ce maillage est constitué d'éléments et de noeuds. On choisit ensuite une famille de champs locaux dans chaque sous

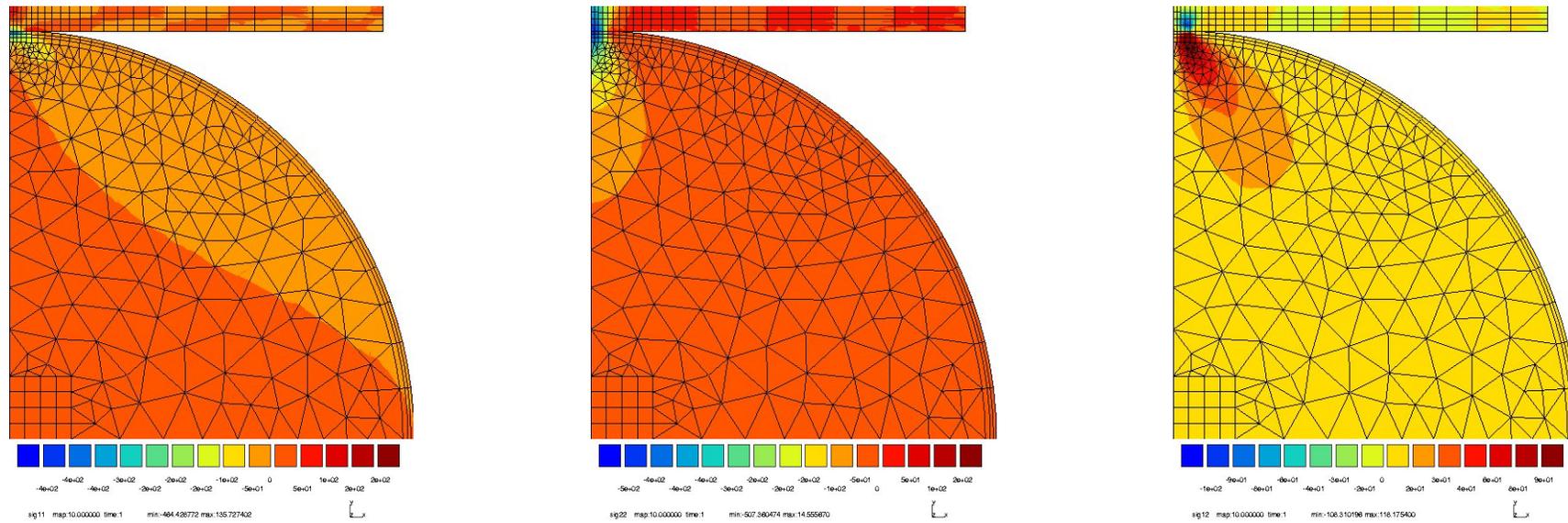
domaine, et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous domaines. Il faut noter que ces deux étapes sont essentielles pour la qualité de la solution approchée. Le problème se ramène ainsi à un problème discret : c'est ce que l'on appelle la discrétisation. La solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. On exploite enfin la solution pour juger de sa qualité numérique.

Cette méthode a été mise en oeuvre pour l'essai brésilien. Les figures suivantes permettent de visualiser les contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ .

## Questions

A1. Connaissant la solution de Hertz pour deux cylindres en contact, en déduire la solution pour un cylindre en contact avec un plan rigide. Est-ce que ce choix (plan rigide) vous paraît judicieux ?

A2. Tracer sur le même diagramme l'évolution des contraintes  $\sigma_{11}$ , ainsi que des contraintes  $\sigma_{22}$ , pour la solution de Hertz, la solution analytique et la solution de calcul par éléments finis. Commenter les différences obtenues. Quelle solution vous paraît-il préférable de considérer ?



Les fichiers comportant les résultats en contrainte ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ) sur l'axe  $x_2$  peuvent être téléchargés [ICI](#).

Figure A1 : Cartes de contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  pour une force appliquée  $F = 511 \text{ N}$

## Références

- [1] J.C Jaeger and Neville G. W Cook. *Fundamentals of rock mechanics*. Methuen, London, 1969.
- [2] K.L Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.