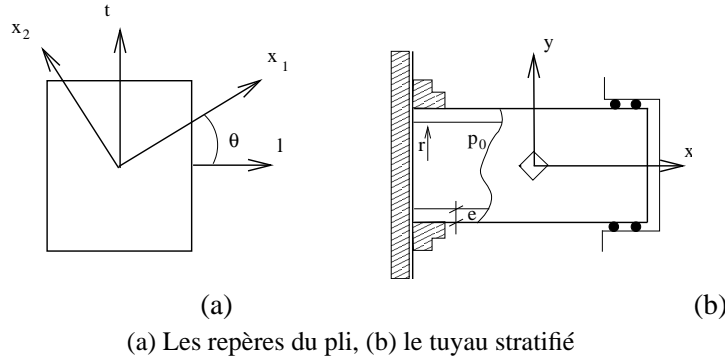


ÉTUDE D'UNE TUYAUTERIE EN VERRE ÉPOXY SOUS PRESSION INTERNE



1. Étude de la loi de comportement du pli

Le pli est défini dans ses axes d'orthotropie (l, t) par la loi de comportement :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ll} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{ll} & -\nu_{lt}/E_{tt} & 0 \\ -\nu_{lt}/E_{ll} & 1/E_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{lt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ll} \\ \sigma_{tt} \\ \tau_{lt} \end{bmatrix}$$

avec $\frac{\nu_{ll}}{E_{tt}} = \frac{\nu_{lt}}{E_{ll}}$

1.1 Exprimer cette relation dans le repère (x_1, x_2) défini par l'angle $\theta = (x_1, l)$ (Fig.1).

La matrice de passage P du repère (l, t) au repère (x_1, x_2) s'écrit, avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$:

$$[P] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Elle permet de passer des composantes (V_l, V_t) aux composantes (V_1, V_2) du vecteur \vec{V} et des composantes $\sigma_{ll}, \sigma_{tt}, \sigma_{lt}$ du tenseur des

contraintes dans (l, t) aux composantes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$:

$$\begin{pmatrix} V_l \\ V_t \end{pmatrix} = {}^t [P] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{ll} & \sigma_{lt} \\ \sigma_{lt} & \sigma_{tt} \end{bmatrix} = {}^t [P] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} [P]$$

On peut écrire la même relation, mais sous forme de vecteur :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ll} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{lt} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

De même en considérant le vecteur déformation on montre de façon analogue, avec $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ll} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [T'] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Il vient donc :

$$\{\varepsilon\}_{(l,t)} = [S]_{(l,t)} \{\sigma\}_{(l,t)}; \quad \{\sigma\}_{(l,t)} = [T] \{\sigma\}_{(x_1, x_2)}; \quad \{\varepsilon\}_{(x_1, x_2)} = [T'] \{\varepsilon\}_{(l,t)}$$

d'où :

$$\{\varepsilon\}_{(x_1, x_2)} = T' [S]_{(l,t)} T \{\sigma\}_{(x_1, x_2)}$$

et :

$$[S]_{(x_1, x_2)} = T' [S]_{(l,t)} T$$

Soit l'expression suivante pour $S_{(x_1, x_2)}$:

$$S_{(x_1, x_2)} = [T'] \begin{bmatrix} 1/E_{ll} & -\nu_{lt}/E_{tt} & 0 \\ -\nu_{lt}/E_{ll} & 1/E_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{lt} \end{bmatrix} [T]$$

$$S_{(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\eta_{12}/G_{12} \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & \mu_{12}/G_{12} \\ \nu_{11}/E_{11} & \mu_{22}/E_{22} & 1/G_{12} \end{bmatrix}$$

Les termes ν_{11} , ν_{12} , ν_{21} , μ_{12} et μ_{22} introduits ici correspondent au couplage traction–cisaillement induit par l’anisotropie du pli. Les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 1/E_{11} &= c^4/E_{ll} + s^4/E_{tt} + c^2s^2(1/G_{lt} - 2\nu_{tl}/E_{tt}) \\ 1/E_{22} &= s^4/E_{ll} + c^4/E_{tt} + c^2s^2(1/G_{lt} - 2\nu_{tl}/E_{tt}) \\ 1/G_{12} &= 4c^2s^2(1/E_{ll} + 1/E_{tt} + 2\nu_{tl}/E_{tt}) + (c^2 - s^2)^2/G_{lt} \\ \nu_{21}/E_{22} &= (c^4 + s^4)\nu_{tl}/E_{tt} - c^2s^2(1/E_{ll} + 1/E_{tt} - 1/G_{lt}) \\ \eta_{12}/G_{12} &= -2cs\{c^2/E_{ll} - s^2/E_{tt} + (c^2 - s^2)(\nu_{tl}/E_{tt} - 1/2G_{lt})\} \\ \mu_{12}/G_{12} &= -2cs\{s^2/E_{ll} - c^2/E_{tt} - (c^2 - s^2)(\nu_{tl}/E_{tt} - 1/2G_{lt})\} \end{aligned}$$

1.2 Donner dans le repère (x_1, x_2) la relation donnant σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en fonction de ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} .

Lorsqu’on inverse la relation de comportement écrite dans les axes d’orthotropie (l, t) du pli, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ll} \\ \sigma_{tt} \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{lt}\nu_{tl}} \begin{bmatrix} E_{ll} & \nu_{tl}E_{ll} & 0 \\ \nu_{lt}E_{tt} & E_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt}(1 - \nu_{lt}\nu_{tl}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ll} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}$$

où apparaissent des coefficients dits de “raideur”, par opposition à ceux dénommés coefficients de “souplesse”. Pour alléger l’écriture, on notera $\bar{E}_{ll} = E_{ll}/(1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$ et $\bar{E}_{tt} = E_{tt}/(1 - \nu_{lt}\nu_{tl})$. Une procédure identique à celle qui a été suivie pour écrire la loi de comportement déformations–contraintes conduit à introduire les matrices (3×3) T_1 pour la contrainte et T'_1 pour la déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{ll} \\ \sigma_{tt} \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{ll} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

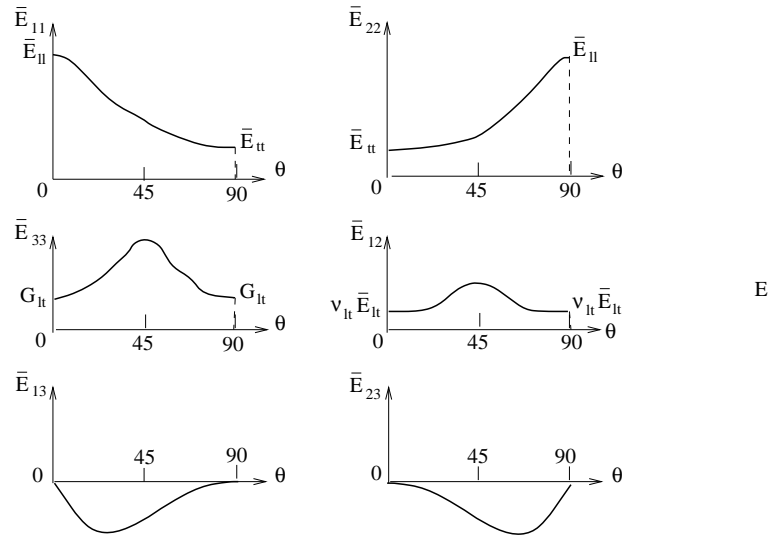
Les axes (x_1, x_2) étant toujours déduits des axes (l, t) par rotation θ autour du troisième axe x_3 la loi de comportement s’écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_l] \begin{bmatrix} \bar{E}_{ll} & \nu_{lt}\bar{E}_{ll} & 0 \\ \nu_{lt}\bar{E}_{tt} & \bar{E}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} [T_l] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ou :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= c^4\bar{E}_{ll} + s^4\bar{E}_{tt} + 2c^2s^2(\nu_{lt}\bar{E}_{ll} + 2G_{lt}) \\ \bar{E}_{22} &= s^4\bar{E}_{ll} + c^4\bar{E}_{tt} + 2c^2s^2(\nu_{lt}\bar{E}_{ll} + 2G_{lt}) \\ \bar{E}_{33} &= c^2s^2(\bar{E}_{ll} + \bar{E}_{tt} - 2\nu_{lt}\bar{E}_{ll}) + (c^2 - s^2)^2G_{lt} \\ \bar{E}_{12} &= c^2s^2(\bar{E}_{ll} + \bar{E}_{tt} - 4G_{lt}) + (c^4 + s^4)\nu_{lt}\bar{E}_{ll} \\ \bar{E}_{13} &= -cs\{c^2\bar{E}_{ll} - s^2\bar{E}_{tt} - (c^2 - s^2)(\nu_{lt}\bar{E}_{ll} + 2G_{lt})\} \\ \bar{E}_{23} &= -cs\{s^2\bar{E}_{ll} - c^2\bar{E}_{tt} + (c^2 - s^2)(\nu_{lt}\bar{E}_{ll} + 2G_{lt})\} \end{aligned}$$



Variations en fonction de l'angle θ des coefficients de raideur \bar{E}_{ij}

2. Étude d'une tuyauterie en stratifié

On considère un tube mince réalisé par enroulement filamentaire équilibré en verre/époxyde avec pour angles d'enroulement $\pm 45^\circ$ (Fig. 2). Il s'agit de la superposition des plis étudiés en partie 1. Le pourcentage en volume de fibres est $V_f = 0.6$. Le tube est bridé à une extrémité sur un massif rigide indéformable, et monté sur joint glissant étanche à l'autre extrémité.

L'épaisseur e est considérée faible devant le rayon ($e/r \ll 1$). On installe à l'intérieur de ce tube une pression unitaire $P_0 = 1$ MPa (soit 10 bars). On adopte un coefficient de sécurité égal à 8 pour tenir compte du vieillissement.

2.1 Calculer les contraintes (σ_{xx}, σ_{yy}) dans les axes xy du plan tangent en O au tube.

La solution exacte dans un tube sous pression interne P_0 se trouve en exprimant que les contraintes sont de la forme : $\sigma_{rr} = A - B/r^2$, $\sigma_{\theta\theta} = A + B/r^2$, et en écrivant les conditions aux limites,

$$\sigma_{rr}(r = r_1) = -P_0 ; \sigma_{rr}(r = r_2) = 0.$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P_0 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{P_0 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

Lorsque le tube est mince, on peut exprimer les rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 en fonction du rayon moyen R et de l'épaisseur e : $r_1 = R - e/2$, $r_2 = R + e/2$, et effectuer un développement limité, en supposant que e est petit devant R . La contrainte radiale devient négligeable devant la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$, et $\sigma_{\theta\theta} = P_0 R/e$. Avec les conventions choisies ici, et sachant que le tube est libre à ses extrémités (contrainte axiale nulle), il est raisonnable de considérer l'état de contrainte comme uniaxial, avec comme seule composante non nulle $\sigma_{yy} = P_0 R/e$.

2.2 Si on admet que la contrainte admissible dans un composite constitué de 50% de plis à $+45^\circ$ et -45° est de 94 MPa, quelle est l'épaisseur minimum du tube pour un rayon moyen $R = 100$ mm.

Expérimentalement on trouve que la contrainte maximum admissible σ_{yy}^{\max} pour 50% de plis à $\pm 45^\circ$, est de 94 MPa. On trouve donc l'épaisseur admissible : (P_0 et σ_{yy} en MPa, R et e en mm).

$$e = \frac{P_0 R}{\sigma_{yy}^{\max}} = \frac{1 \times 100}{94} = 1.064 \text{ mm}$$

Si on admet un coefficient de sécurité de 8 sur l'épaisseur, il faut prendre :

$$e \simeq 8.5 \text{ mm}$$

2.3 Soient les modules E_{xx} , E_{yy} et G_{xy} du stratifié, et les coefficients de Poisson ν_{xy} et ν_{yx} , de valeurs numériques :

$$E_{xx} = E_{yy} = 14130 \text{ MPa} ; \nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.57 ; G_{xy} = 12760 \text{ MPa}.$$

Ecrire la loi de comportement déformations-contraintes du stratifié

dans les axes x, y .

Connaissant les modules du stratifié, la matrice de souplesse s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_x & 0 \\ -\nu_{xy}/E_y & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{14130} \begin{bmatrix} 1 & -0.57 & 0 \\ -0.57 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.107 \end{bmatrix}$$

- 2.4 Calculer les déformations ϵ_{xx} et ϵ_{yy} du tube composite ainsi dimensionné. En déduire la déformation dans le sens perpendiculaire au sens des fibres à $+45^\circ$, notée ϵ_{tt} , qui caractérise alors essentiellement celle de la résine. Cette déformation doit demeurer inférieure à 0.1% sous peine de microfissuration, entraînant le cheminement du fluide à travers l'épaisseur du tube (phénomène de **perlage**). Vérifier que le tube respecte effectivement cette condition.

Pour $P_0 = 1$ MPa, $R = 100$ mm et $e = 8.5$ mm :

$$\sigma_{yy} = 1 \times 100/8.5 = 11,8 \text{ MPa.}$$

La déformation est donc :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{14130} \begin{bmatrix} 1 & -0.57 & 0 \\ -0.57 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.107 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 11.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

D'où : $\epsilon_{xx} = 4.676 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_{yy} = 8.35 \cdot 10^{-4}$.

Par rotation de 45° , on obtient dans la direction perpendiculaire aux fibres :

$$\epsilon_{tt} = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})/2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \quad \epsilon_{tt} = 0.018\%$$

La limite d'endommagement de la résine étant voisine de 1%, la valeur trouvée est acceptable.