



IAE Poutres planes

Georges Cailletaud

Centre des Matériaux
MINES ParisTech

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes
 - Cinématique
 - Equilibre
 - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

Plan

1 Géométrie et chargement

2 Solution de Saint-Venant

3 Principe des travaux virtuels

4 Poutres homogènes planes

- Cinématique
- Equilibre
- Loi de comportement

5 Poutres composites

Définition d'une poutre

On définit successivement :

- Une *ligne moyenne* C , de point courant G , avec s , abscisse curviligne à partir de O
- $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ est le trièdre de Frenet orthonormé, où R est le *rayon de courbure*

$$\underline{t} = \frac{dOG}{ds} \quad \underline{n} = R \frac{d\underline{t}}{ds} \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}$$

- Une *section droite*, S de la poutre, dans le plan $(\underline{n}, \underline{b})$, de contour Γ
- Les sections droites sont lentement variables ou constantes en fonction de s
- La plus grande dimension de la section droite est petite devant R , et devant la longueur de la poutre

Caractéristiques géométriques

- Le centre de gravité vérifie $\int_S \underline{GM} dS = 0$
- On définit le **moment quadratique** par rapport à une droite Δ de la section droite, en introduisant H , projection de $M \in S$ sur Δ

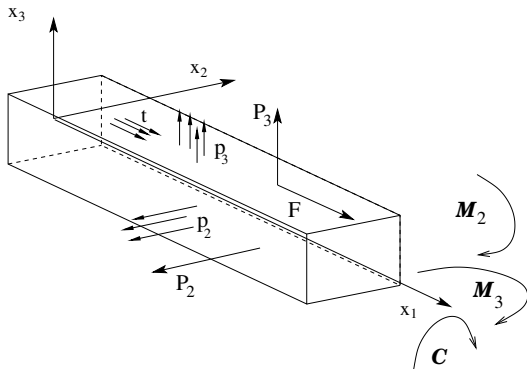
$$I(S, \Delta) = \int_S ||\underline{HM}||^2 dS$$

idem moment d'inertie d'un solide autour d'une droite, mais solide plan et masse surfacique de 1

- Matrice des moments quadratiques $I = \begin{matrix} I_{22} = \int_S x_3^2 dS & I_{23} = - \int_S x_2 x_3 dS \\ I_{32} = - \int_S x_2 x_3 dS & I_{33} = \int_S x_2^2 dS \end{matrix}$
- Dans les **directions centrales principales**, on définit les **moments quadratiques centraux principaux**

$$I = \begin{matrix} I_2 = \int_S x_3^2 dS & 0 \\ 0 & I_3 = \int_S x_2^2 dS \end{matrix}$$

Efforts extérieurs



- Forces concentrées F selon x_1 , P_2 selon x_2 , P_3 selon x_3
- Forces surfaciques t selon x_1 , p_2 selon x_2 , p_3 selon x_3
- Moment de flexion M_2 autour de x_2 , M_3 autour de x_3
- Couple de torsion autour de x_1 , C

Efforts intérieurs

- Résultante N selon x_1 , T_2 selon x_2 , T_3 selon x_3
 N est l'*effort normal*, T_2 et T_3 les composantes de l'*effort tranchant*
- *Moment de flexion* M_2 autour de x_2 , M_3 autour de x_3
- *Couple de torsion* autour de x_1 , M_1

Plan

1 Géométrie et chargement

2 Solution de Saint-Venant

3 Principe des travaux virtuels

4 Poutres homogènes planes

- Cinématique
- Equilibre
- Loi de comportement

5 Poutres composites

Solution de Saint-Venant

- *Hypothèse de Saint-Venant* : On cherche la solution sous la forme

$$\sigma_{..} = \begin{matrix} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{matrix}$$

- *Principe de Saint-Venant* : La solution trouvée pour la poutre impose une certaine répartition de contrainte sur les extrémités. Si celle-ci n'est pas vérifiée, mais que les torseurs sont égaux, la perturbation créée n'est que locale. *La solution de Saint-Venant est valable loin des points de chargement* (quelques fois la dimension caractéristique de la section)

Statique

- *Equations d'équilibre*

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} &= 0 \\ \sigma_{21,1} &= 0 \\ \sigma_{31,1} &= 0\end{aligned}$$

- *Equations de Beltrami*

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,||} - \nu\sigma_{kk,||}\delta_{,ij} + \sigma_{kk,ij} = 0$$

$$\begin{aligned}-\sigma_{11} - \sigma_{11,11} &= 0 \\ (1 + \nu)\sigma_{12} + \sigma_{11,12} &= 0 \\ (1 + \nu)\sigma_{13} + \sigma_{11,13} &= 0 \\ -\sigma_{11,22} + \nu\sigma_{11} &= 0 \\ -\sigma_{11,23} &= 0 \\ -\sigma_{11,33} + \nu\sigma_{11} &= 0\end{aligned}$$

Statique

- *Forme de la solution*

$$\sigma_{11} = a_0 + a_1 x_1 + (b_0 + b_1 x_1) x_2 + (c_0 + c_1 x_1) x_3$$

$$\sigma_{12} = -\frac{a_1}{2} x_2 - c_1 x_2 x_3 - \frac{b_1}{1 + \nu} \frac{x_3^2}{2}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{a_1}{2} x_3 - b_1 x_2 x_3 - \frac{c_1}{1 + \nu} \frac{x_2^2}{2}$$

- *Conditions aux limites, surface $s = L$*

$$F = \int_S \sigma_{11} dS \quad P_2 = \int_S \sigma_{12} dS \quad P_3 = \int_S \sigma_{13} dS$$

$$\mathcal{M}_2 = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad \mathcal{M}_3 = - \int_S x_2 \sigma_{11} dS$$

Forme finale de la solution en contrainte

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_2} x_3 - \frac{M_3}{I_3} x_2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{T_3}{I_2} x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2} + \phi_{,3}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3} x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2} - \phi_{,2}$$

... On passe ensuite aux déformations,
aux rotations, puis aux déplacements

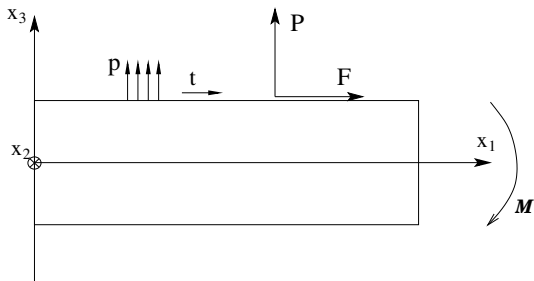
Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels**
- 4 Poutres homogènes planes
 - Cinématique
 - Equilibre
 - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

On va maintenant reprendre le problème
en partant d'une hypothèse cinématique
et en appliquant le principe des travaux virtuels

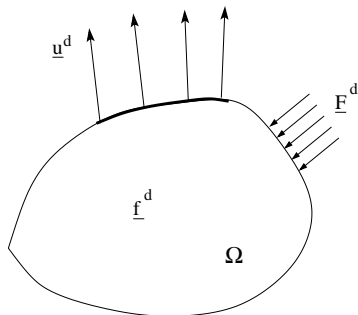
Pour plus de concision, on se résume à la résolution dans un plan

Poutre droite à section symétrique chargée dans son plan



- La ligne neutre est l'axe x_1
- La poutre se déforme dans le plan $x_1 - x_3$, qui est plan principal d'inertie
- L'axe x_1 est le lieu des centres d'inertie des sections : $\int_S x_3 dS = 0$

Efforts extérieurs et déplacements imposés



- Déplacement imposé \underline{u}^d sur la surface $\partial\Omega_U$
- Force répartie imposée \underline{F}^d sur la surface $\partial\Omega_F$
- Force volumique imposée \underline{f}^d à l'intérieur de Ω

Champ \underline{u}' CCA (cinématiquement admissible) :

$$\underline{u}' = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_U$$

$$\underline{\varepsilon}' = 0.5 \underset{\sim}{\text{grad}} \underline{u}' + \underset{\sim}{\text{grad}}^T \underline{u}'$$

Champ $\underline{\sigma}^*$ CSA (statiquement admissible) :

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma}^* + \underline{f}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Evaluation du travail développé par $\underline{\sigma}^*$ dans \underline{u}'

Pour $\underline{\sigma}^*$ CSA et \underline{u}' CCA *non* reliés par la loi de comportement

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (u'_{i,j} + u'_{j,i}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u'_{i,j} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* u'_{i,j} - \sigma_{ij,j}^* u'_i) d\Omega \\
 &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^* n_j u'_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u'_i d\Omega \\
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} F_i u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega
 \end{aligned}$$

Théorème des travaux virtuels :

$\forall u'_i$, variation autour d'un état d'équilibre ($u'_i = 0$ sur $\partial\Omega_u$)

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = -\delta W_{int} = \delta W_{ext} = \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega$$

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
 - Cinématique
 - Equilibre
 - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
 - **Cinématique**
 - Equilibre
 - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

Cinématique de la poutre de Timoshenko

L'idée consiste, pour un solide élancé, à postuler une description simplifiée, globale, de la structure, au lieu de chercher une résolution exacte. Les solutions obtenues sont d'autant plus satisfaisantes que l'élanement est important (et fausses dans le cas contraire).

Pour traiter le cas d'une poutre *plane*, on conserve dans la description géométrique deux translations et un angle. Il leur correspondra deux forces et un moment, conjugués (au sens du travail virtuel).

Sollicitation	axe de la poutre	perp à l'axe	moment de flexion
«force»	N	T	M
«déplacement»	U	V	θ

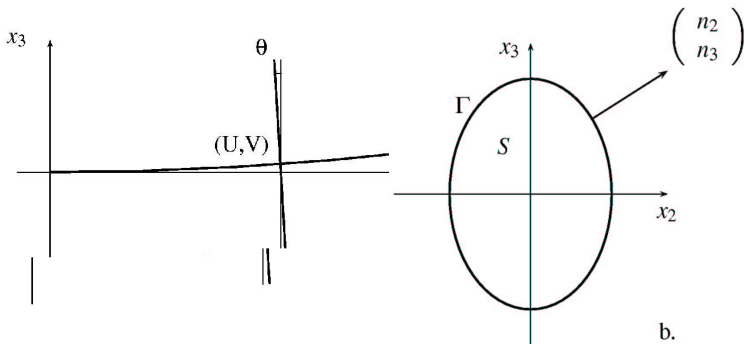
Pour le cas d'une poutre mince, on néglige le cisaillement (modèle N , M , Navier–Bernoulli).

$$u_1 = U'(x_1) + \theta' x_3$$

$$u_3 = V'(x_1)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3$$

$$2\varepsilon'_{13} = V'_{,1} + \theta'$$



Plan de la ligne neutre

Section

Travaux virtuels des efforts internes

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_{\Omega} (\varepsilon'_{11} \sigma_{11} + 2\varepsilon'_{13} \sigma_{13}) d \\ &= - \int_L U'_{,1} \int_S \sigma_{11} dS + \theta'_{,1} \int_S x_3 \sigma_{11} dS + (V'_{,1} + \theta') \int_S \sigma_{13} dS \quad dx_1 \end{aligned}$$

On introduit alors naturellement les quantités N , T , M conjuguées de U , V , θ :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

ce qui donne :

$$\delta W_{int} = - \int_L N U'_{,1} + M \theta'_{,1} + T (V'_{,1} + \theta') \quad dx_1$$

Traitement du travail des efforts intérieurs

A partir de :

$$\delta W_{int} = - \int_L NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta') dx_1$$

On intègre classiquement par parties le travail des efforts intérieurs, par exemple :

$$\int_L NU'_{,1} dx_1 = \int_L (NU')_{,1} - N_{,1}U' dx_1 = NU' \Big|_0^L - \int_L N_{,1}U' dx_1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & - \int_L -N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \\ & + N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \\ & + M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \end{aligned}$$

Travail des efforts extérieurs

On suppose que les forces concentrées sont appliquées aux extrémités ($x_1 = 0$ et $x_1 = L$), et on intègre entre 0 et L les efforts répartis. Les données sont :

- les forces normales F_0 et F_L , tangentiellles P_0 et P_L ,
- les moments \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_L ,
- les efforts répartis sur la surface, représentés par des densités linéiques normales p et tangentielle t :

$$\delta W_{ext} = F_0 U'(0) + F_L U'(L) + P_0 V'(0) + P_L V'(L) + \mathcal{M}_0 \theta'(0) + \mathcal{M}_L \theta'(L) + \int_L p V' + t U' dx_1$$

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
 - Cinématique
 - Equilibre**
 - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

Caractérisation de l'équilibre

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & - \int_L -N_{,1} U' - M_{,1} \theta' - T_{,1} V' + T \theta' \, dx_1 \\ & + N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \\ & + M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & F_0 U'(0) + F_L U'(L) + P_0 V'(0) + P_L V'(L) + \mathcal{M}_0 \theta'(0) + \mathcal{M}_L \theta'(L) \\ & + \int_L p V' + t U' \, dx_1 \end{aligned}$$

Comme l'égalité $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$ est valable quel que soit le triplet (U', V', θ') , on trouve, en identifiant terme à terme les expressions de δW_{int} et δW_{ext} :

$$N(0) = -F_0 \quad N(L) = F_L \quad T(0) = -P_0 \quad T(L) = P_L$$

$$M(0) = -\mathcal{M}_0 \quad M(L) = \mathcal{M}_L$$

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

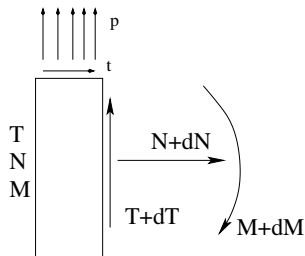
écriture de l'équilibre

On pose :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

On obtient :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$



Signification physique
pour une «tranche» de la poutre

$$dN = -tdx_1$$

$$dT = -pdx_1$$

$$dM = Tdx_1$$

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
 - Cinématique
 - Equilibre
 - Loi de comportement**
- 5 Poutres composites

Lois de comportement : force axiale

- On a $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$
- On néglige σ_{22} et σ_{33}

$$N = \int_S \sigma_{11} dS = \int_S E\varepsilon_{11} dS = \int_S Eu_{1,1} dS$$

$$N = \int_S EU_{,1} dS + \int_S E(\theta x_3)_{,1} dS$$

Le deuxième terme du développement est nul.

$$N = U_{,1}ES$$

Lois de comportement : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = \int_S x_3 E \varepsilon_{11} dS = E \int_S x_3 U_{,1} dS + E \int_S x_3 (\theta x_3)_{,1} dS$$

Le premier terme du développement est nul.

$$M = E \theta_{,1} \int_S x_3^2 dS = E \theta_{,1} I$$

avec $I = \int_S x_3^2 dS$, moment quadratique par rapport à x_2 , si bien que :

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = E I \theta_{,1}$$

Pour une section rectangulaire, de hauteur $2h$ et de largeur b , $I = \frac{2bh^3}{3}$

Lois de comportement : cisaillement

$$T = \int_S \sigma_{13} = \int_S 2\mu \varepsilon_{13} dS = \int_S \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) dS = \int_S \mu (\theta + V_{,1}) dS$$

si bien que : $T = \mu S (\theta + V_{,1})$

Lois de comportement

Les relations suivantes constituent les lois de comportement globales de la structure.

$$N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}$$

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

$$\theta_{,1} = M/EI$$

$$M_{,1} - T = 0$$

$$T_{,1} + p = 0$$

Déformée



flexion



cisaillement

La flèche est obtenue comme solution d'un problème d'ordre 4 par rapport aux efforts appliqués ; elle est d'ordre 2 pour un moment constant :

$$V_{,1111} = -\frac{p}{EI} \quad V_{,11} = -\theta_{,1} = -\frac{M}{EI}$$

Degré de chaque variable
en fonction de x_1

	p	T	M	θ	V
	-	-	0	1	2
	-	0	1	2	3
	0	1	2	3	4

Méthode de résolution

Le *déplacement horizontal* s'obtient en intégrant la relation :

$$U_{,1} = N/ES$$

La *rotation relative* entre les sections s'obtient en intégrant la relation :

$$\theta_{,1} = M/EI$$

La *flèche* est le résultat de la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation elle même, et l'autre de l'effort tranchant T :

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

Remarques

Expression des contraintes locales

La connaissance de U , V et θ permet de remonter aux champs de déformation et de contrainte locaux. ($\simeq E\varepsilon_{11} = Eu_{1,1}$) est la somme de deux termes, dus à l'élongation et à la flexion :

$$\sigma_{11} \simeq N/S + Mx_3/I$$

Si le cisaillement est négligeable

$$\theta = -V_{,1}$$

$$M = -EIV_{,11}$$

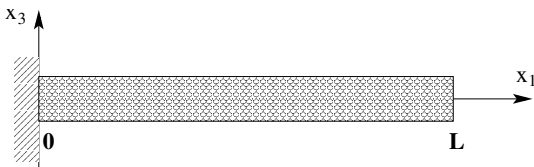
Conditions aux limites

Poutre $0 < x_1 < L$

- Extrémité libre : $T = 0, M = 0$
- Extrémité chargée : $N(0) = -F_0, N(L) = F_L, M(0) = -\mathcal{M}_0, M(L) = \mathcal{M}_L$
- Encastrement : $V = 0, \theta = 0$
- Déplacement imposé : $V = V_0, \theta = \theta_0$
- Appui simple : $V = 0, M = 0$

Poutre encastrée soumise à son propre poids

Poutre $0 < x_1 < L$, de hauteur $2h$ et de largeur b , encastrée en $x_1 = 0$



$$\begin{array}{lll}
 T_{,1} = -\rho g S & T(L) = 0 & T(x_1) = -\rho g S(x_1 - L) \\
 M_{,1} = T & M(L) = 0 & M(x_1) = -\frac{1}{2}\rho g S(x_1 - L)^2 \\
 \theta_{,1} = \frac{M}{EI} & \theta(0) = 0 & \theta(x_1) = -\frac{\rho g S}{6EI} L^3 + (x_1 - L)^3 \\
 V_{,1} = -\theta & V(0) = 0 & V(x_1) = \frac{\rho g S}{6EI} \left(\frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)
 \end{array}$$

- Comme $S = 2bh$, $I = \frac{2}{3}bh^3$

$$V(x_1) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left(\frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)$$

Poutre encastrée soumise à son propre poids (2)

- Expression de la flèche pour la poutre

$$V(x_1) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left(\frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)$$

- Flèche pour $x_1 = L$, pour $x_1 = L/2$

$$V(L) = \frac{3\rho g L^4}{8Eh^2} \quad V(L/2) = \frac{17\rho g L^4}{128Eh^2}$$

- Flèche proportionnelle à ρ/E , L^4 , h^2
- (Flèche à $L/2$ / Flèche max) = $\frac{17}{128} \frac{8}{3} \approx 0,354$
- Application avec $L=1,90$ m ; $g=-9,81$ m/s² ; $\rho=380$ kg/m³ ; $h=3,0$ mm ;
 $E=8500$ MPa ; $V_{max}=-24$ cm

Forces ou moments concentrés

Poutre $0 < x_1 < L$

- Lorsque la dérivée est définie :

$$T(x_1) = T(0) + \int_0^{x_1} \frac{dT}{d\xi} d\xi = T(L) + \int_L^{x_1} \frac{dT}{d\xi} d\xi$$

$$T(x_1) = T(0) - \int_0^{x_1} p(\xi) d\xi = T(L) - \int_L^{x_1} p(\xi) d\xi$$

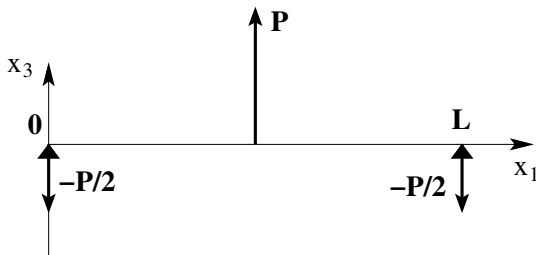
- Une force concentrée conduit à une discontinuité, ainsi :

$$T(x_1) = T(0) - \int_0^{x_1} p(\xi) d\xi - \sum P(X_i) \quad \text{avec : } 0 < X_i < x_1$$

- Exemple d'une poutre sur appuis simples, chargée en son milieu avec une force ponctuelle P . Hormis P en $x_1 = L/2$, les efforts extérieurs sont :

$$P_0 = -P/2 \quad P_L = -P/2$$

Calcul de T pour une poutre sur deux appuis simples (flexion 3 points)



- Efforts tranchants aux extrémités :

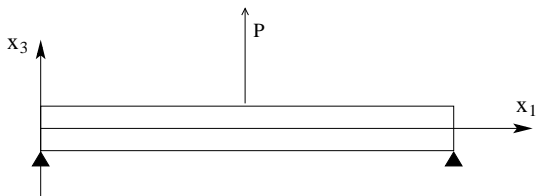
$$T(0) = -P_0 = P/2 \quad T(L) = P_L = -P/2$$

- Passage en $x_1 = L/2$:

$$T = -P$$

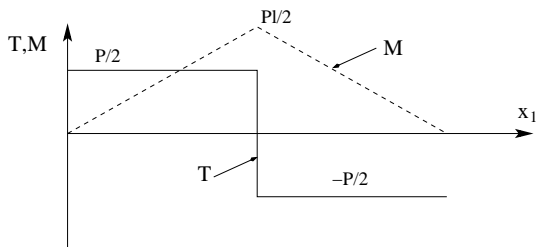
- Pour $0 < x_1 < L/2$: $T(x_1) = P/2$
- Pour $L/2 < x_1 < L$: $T(x_1) = -P/2$

Poutre sur deux appuis simples (flexion 3 points)



$$\text{si } x_1 < l \quad : \quad T = P/2; \quad M = Px_1/2$$

$$\text{si } x_1 > l \quad : \quad T = -P/2; \quad M = P(l - x_1/2)$$



Flexion 3 points : calcul de la flèche max

L'angle θ est tel que $\theta_{,1} = Px_1/2EI$, et, comme il est nul en $x_1 = l$, on a :

$$\theta = \frac{P(x_1^2 - l^2)}{4EI}$$

La flèche, qui est nulle en $x_1 = 0$, se calcule par :

$$V(x_1) = - \int_0^{x_1} \theta dx_1 + \int_0^{x_1} \frac{T}{\mu S} dx_1 = \frac{P}{4EI} (l^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}) + \frac{P}{2\mu S} x_1$$

Le maximum est obtenu pour $x_1 = l$:

$$V(l) = \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl}{2\mu S}$$

Flexion 3 points : valeur numérique de la flèche max

$$V(l) = \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl}{2\mu S}$$

Application numérique :

$P = -160$ N, $l = 250$ mm, $E = 75000$ MPa, $\nu = 0.3$, $b = 100$ mm,
 $h = 2$ mm (l est la demi-longueur, h est la demi-épaisseur)

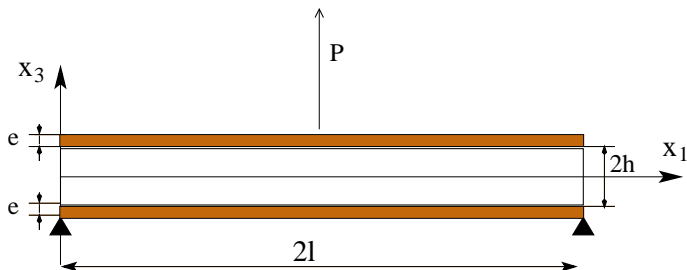
$$EI = \frac{2}{3} 100 \times 75000 \times 2^3 = 40000000 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$\mu S = \frac{750002 \times 1.3}{\times} 100 \times 2 = 5769231 \text{ N}$$

$$v = (-10.41 - 0.0017) \text{ mm}$$

Le terme lié à l'effort tranchant est négligeable.

Poutre sandwich en flexion 3 points



On considère un sandwich, avec au centre $(-h < x_3 < h)$ un matériau à faibles propriétés mécaniques, de type mousse (caractéristiques élastiques E_m et μ_m), et, de chaque côté $(-h - e < x_3 < -h$ et $h < x_3 < -h + e)$ une couche métallique (caractéristiques élastiques E_a et μ_a).

Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes
 - Cinématique
 - Equilibre
 - Loi de comportement
- 5 **Poutres composites**

Poutre sandwich : force axiale

On a toujours : $N = \int_S \sigma_{11} dS$; il faut reconstruire une approximation de σ_{11}
 La contrainte σ_{11} est *discontinue*, et : $\sigma_{11}(x_3) = E(x_3)\varepsilon_{11}$

$$\sigma_{11} = E(x_3) (U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3)$$

$$N = U_{1,1} \int_S E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3 dS$$

Si $E(x_3)$ est une fonction paire en x_3 , et indépendante de x_2 ; la seconde intégrale est nulle

$$N = \langle ES \rangle U_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle ES \rangle = \int_S E(x_3) dS$$

Poutre sandwich : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

$$\sigma_{11} = E(x_3) (U_{1,1} + \theta_{1,1} x_3)$$

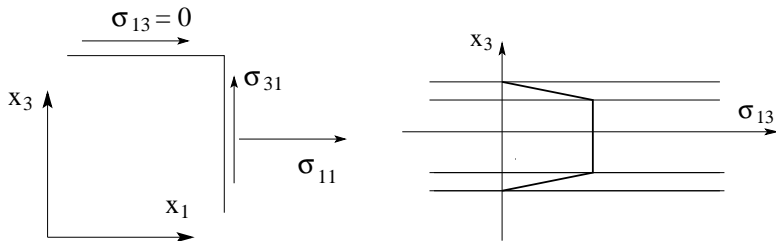
$$M = U_{1,1} \int_S x_3 E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3) x_3^2 dS$$

$E(x_3)$ est une fonction paire en x_3 , et indépendante de x_2 ; la première intégrale est nulle

$$M = \langle EI \rangle \theta_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle EI \rangle = \int_S E(x_3) x_3^2 dS$$

Poutre sandwich : cisaillement

La contrainte σ_{13} est *continue* à l'interface. Il y a une incohérence en surface, car la valeur donnée par la théorie sur une facette de normale parallèle à x_1 est non nulle, alors que la surface x_3 est libre... Dans les couches externes, la contrainte σ_{13} n'est pas égale à $2\mu\epsilon_{13}$.



$$T = \int_S \sigma_{13} dS \approx \int_0^b \int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = (V_{,1} + \theta) \int_{-h}^{+h} 2b\mu(x_3) dx_3$$

$$T \approx \langle \mu S \rangle_{-h}^{+h} (V_{,1} + \theta)$$

Forme générale des équations pour une poutre composite

Si la distribution des modules n'est pas paire en x_3 , il y a un couplage entre traction et flexion. On doit écrire :

$$\begin{array}{r}
 N \\
 M \\
 T
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \int_S E_i dS & \int_S E_i x_3 dS & 0 \\
 \int_S E_i x_3 dS & \int_S E_i x_3^2 dS & 0 \\
 0 & 0 & \int_S \mu_i dS
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 U_{,1} \\
 \theta_{,1} \\
 V_{,1} + \theta
 \end{array}
 \quad (1)$$

Poutre sandwich en flexion 3 points : flèche max

Les calculs effectués ci-dessus restent valables, à condition d'utiliser les valeurs homogénéisées des produits EI et μS :

$$v = \frac{Pl^3}{6 \langle EI \rangle} + \frac{Pl}{2 \langle \mu S \rangle}$$

L'aluminium (E_a, μ_a), est situé entre les cotes $\pm h$ et $\pm(h + e)$. La mousse (E_m, μ_m) entre les cotes $\pm h$. Il vient donc :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} b (E_a ((h + e)^3 - h^3) + E_m h^3)$$

$$\langle \mu S \rangle = 2bh\mu_m$$

Poutre sandwich en flexion 3 points

Application numérique :

L'ensemble ($P = -160$ N, $l = 250$ mm, $E_a = 75000$ MPa, $E_m = 20$ MPa, $\nu_m = 0.3$,
 $b = 100$ mm, $e = 2$ mm, $h = 15$ mm) conduit à :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} \times 100(75000 \times (17^3 - 15^3) + 20 \times 15^3) = 7694500000 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$\langle \mu S \rangle = 2 \times 100 \times 15 \times \frac{20}{2 \times 1.3} = 23077 \text{ N}$$

$$V = (-0.054 - 0.867) \text{ mm}$$

C'est maintenant le terme lié à l'effort tranchant qui est prépondérant. On note l'importance qu'il y a à conserver un matériau qui possède des propriétés non négligeables comme cœur de la poutre. Ainsi, avec un module d'Young de 0,80 MPa au lieu de 20 MPa, on trouverait une flèche de plus de 22 mm, en ayant donc perdu tout l'avantage de l'assemblage «sandwich».

Finite element computations

Material parameter

Aluminium alloy : Young's modulus E_a , Poisson's ratio $\nu_a = 0.3$

Foam, calcul B : Young's modulus E_f , Poisson's ratio ν_f

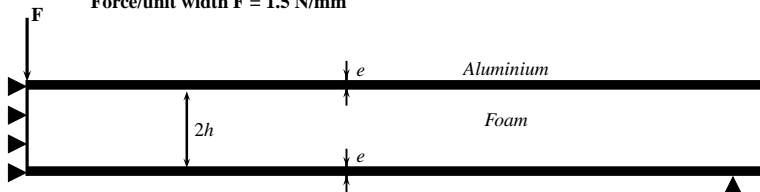
Geometry

Foam thickness $2h$, Alu thickness = e

Length \times Width of the plate = 500 mm \times 100 mm

Loading

Force/unit width $F = 1.5$ N/mm



Mesh and boundary conditions

Aluminium alloy : $E = 75 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$

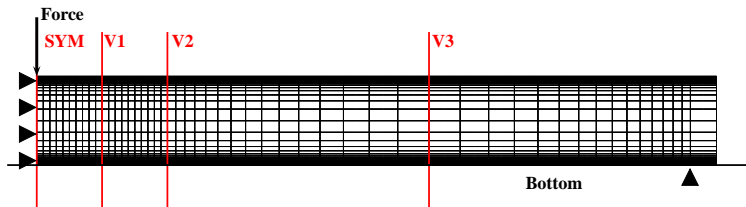
Foam, calcul B : $E = 0.907 \text{ MPa}$, $\nu=0.2$

Foam, calcul C : $E = 20. \text{ MPa}$, $\nu=0.2$

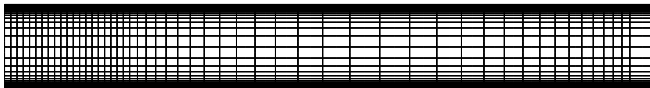
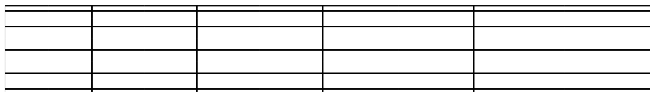
Load = 0.80 N/mm , corresponding to 150 N on a 100 mm plate

A : Half length = 250 mm , Alu width = 4 mm

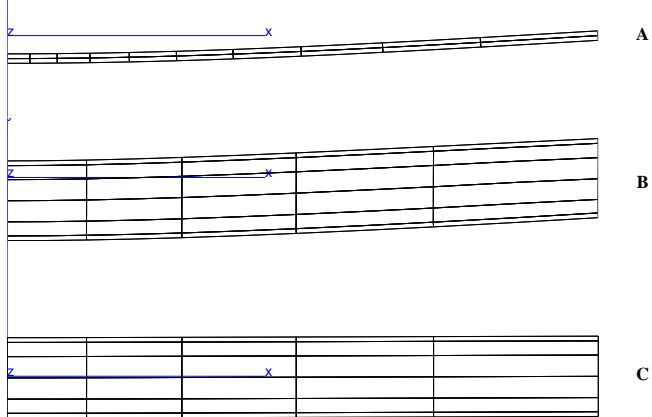
B and **C** : Half length = 250 mm , Alu width = $2 \text{ times } 2 \text{ mm}$, Foam = 30 mm



Coarse and Fine meshes



Deformed shapes



Vertical displacement

