



# IAE Poutres planes

Georges Cailletaud

Centre des Matériaux  
MINES ParisTech

# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes
  - Cinématique
  - Equilibre
  - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

# Plan

1 Géométrie et chargement

2 Solution de Saint-Venant

3 Principe des travaux virtuels

4 Poutres homogènes planes

- Cinématique
- Equilibre
- Loi de comportement

5 Poutres composites

# Définition d'une poutre

On définit successivement :

- Une *ligne moyenne*  $C$ , de point courant  $G$ , avec  $s$ , abscisse curviligne à partir de  $O$
- $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$  est le trièdre de Frénet orthonormé, où  $R$  est le *rayon de courbure*

$$\underline{t} = \frac{dOG}{ds} \quad \underline{n} = R \frac{d\underline{t}}{ds} \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}$$

- Une *section droite*,  $S$  de la poutre, dans le plan  $(\underline{n}, \underline{b})$ , de contour  $\Gamma$
- Les sections droites sont lentement variables ou constantes en fonction de  $s$
- La plus grande dimension de la section droite est petite devant  $R$ , et devant la longueur de la poutre

# Caractéristiques géométriques

- Le centre de gravité vérifie  $\int_S \underline{GM} dS = 0$
- On définit le **moment quadratique** par rapport à une droite  $\Delta$  de la section droite, en introduisant  $H$ , projection de  $M \in S$  sur  $\Delta$

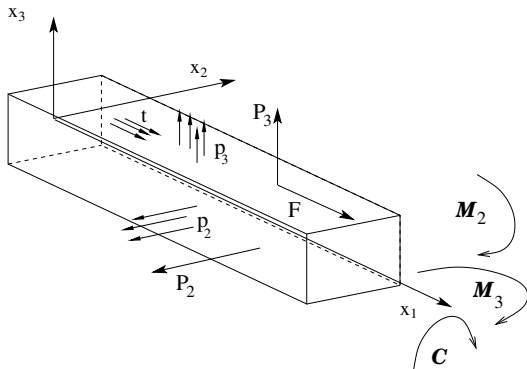
$$I(S, \Delta) = \int_S ||\underline{HM}||^2 dS$$

*idem moment d'inertie d'un solide autour d'une droite, mais solide plan et masse surfacique de 1*

- Matrice des moments quadratiques  $(I) = \begin{pmatrix} I_{22} = \int_S x_3^2 dS & I_{23} = - \int_S x_2 x_3 dS \\ I_{32} = - \int_S x_2 x_3 dS & I_{33} = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix}$
- Dans les **directions centrales principales**, on définit les **moments quadratiques centraux principaux**

$$(I) = \begin{pmatrix} I_2 = \int_S x_3^2 dS & 0 \\ 0 & I_3 = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix}$$

# Efforts extérieurs



- Forces concentrées  $F$  selon  $x_1$ ,  $P_2$  selon  $x_2$ ,  $P_3$  selon  $x_3$
- Forces surfaciques  $t$  selon  $x_1$ ,  $p_2$  selon  $x_2$ ,  $p_3$  selon  $x_3$
- Moment de flexion  $\mathcal{M}_2$  autour de  $x_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  autour de  $x_3$
- Couple de torsion autour de  $x_1$ ,  $C$

# Efforts intérieurs

- Résultante  $N$  selon  $x_1$ ,  $T_2$  selon  $x_2$ ,  $T_3$  selon  $x_3$   
 $N$  est l'*effort normal*,  $T_2$  et  $T_3$  les composantes de l'*effort tranchant*
- *Moment de flexion*  $M_2$  autour de  $x_2$ ,  $M_3$  autour de  $x_3$
- *Couple de torsion* autour de  $x_1$ ,  $M_1$

# Plan

1 Géométrie et chargement

**2 Solution de Saint-Venant**

3 Principe des travaux virtuels

4 Poutres homogènes planes

- Cinématique
- Equilibre
- Loi de comportement

5 Poutres composites



# Solution de Saint-Venant

- *Hypothèse de Saint-Venant* : On cherche la solution sous la forme

$$(\sigma_{..}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Principe de Saint-Venant* : La solution trouvée pour la poutre impose une certaine répartition de contrainte sur les extrémités. Si celle-ci n'est pas vérifiée, mais que les torseurs sont égaux, la perturbation créée n'est que locale. *La solution de Saint-Venant est valable loin des points de chargement* (quelques fois la dimension caractéristique de la section)

# Statique

- *Equations d'équilibre*

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} &= 0 \\ \sigma_{21,1} &= 0 \\ \sigma_{31,1} &= 0\end{aligned}$$

- *Equations de Beltrami*

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,||} - \nu\sigma_{kk,||}\delta_{,ij} + \sigma_{kk,ij} = 0$$

$$\begin{aligned}-\Delta\sigma_{11} - \sigma_{11,11} &= 0 \\ (1 + \nu)\Delta\sigma_{12} + \sigma_{11,12} &= 0 \\ (1 + \nu)\Delta\sigma_{13} + \sigma_{11,13} &= 0 \\ -\sigma_{11,22} + \nu\Delta\sigma_{11} &= 0 \\ -\sigma_{11,23} &= 0 \\ -\sigma_{11,33} + \nu\Delta\sigma_{11} &= 0\end{aligned}$$

# Statique

- *Forme de la solution*

$$\sigma_{11} = a_0 + a_1 x_1 + (b_0 + b_1 x_1)x_2 + (c_0 + c_1 x_1)x_3$$

$$\sigma_{12} = -\frac{a_1}{2}x_2 - c_1 x_2 x_3 - \frac{b_1}{1+\nu} \frac{x_3^2}{2}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{a_1}{2}x_3 - b_1 x_2 x_3 - \frac{c_1}{1+\nu} \frac{x_2^2}{2}$$

- *Conditions aux limites, surface  $s = L$*

$$F = \int_S \sigma_{11} dS \quad P_2 = \int_S \sigma_{12} dS \quad P_3 = \int_S \sigma_{13} dS$$

$$\mathcal{M}_2 = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad \mathcal{M}_3 = - \int_S x_2 \sigma_{11} dS$$

# Forme finale de la solution en contrainte

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_2} x_3 - \frac{M_3}{I_3} x_2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{T_3}{I_2} x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2} + \phi_{,3}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3} x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2} - \phi_{,2}$$

... On passe ensuite aux déformations,  
aux rotations, puis aux déplacements

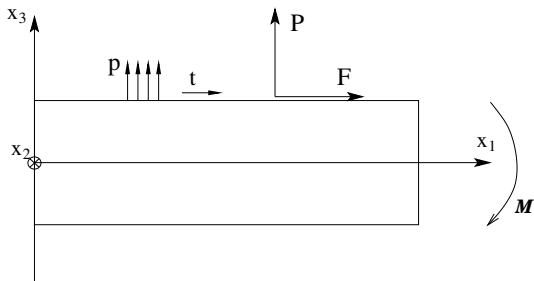
# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels**
- 4 Poutres homogènes planes
  - Cinématique
  - Equilibre
  - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

On va maintenant reprendre le problème  
en partant d'une hypothèse cinématique  
et en appliquant le principe des travaux virtuels

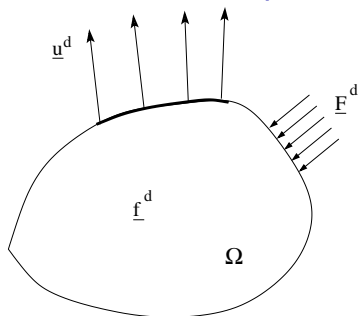
Pour plus de concision, on se résume à la résolution dans un plan

# Poutre droite à section symétrique chargée dans son plan



- La ligne neutre est l'axe  $x_1$
- La poutre se déforme dans le plan  $x_1 - x_3$ , qui est plan principal d'inertie
- L'axe  $x_1$  est le lieu des centres d'inertie des sections :  $\int_S x_3 dS = 0$

# Efforts extérieurs et déplacements imposés



- Déplacement imposé  $\underline{u}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_U$
- Force répartie imposée  $\underline{F}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_F$
- Force volumique imposée  $\underline{f}^d$  à l'intérieur de  $\Omega$

Champ  $\underline{u}'$  CCA (cinématiquement admissible) :

$$\underline{u}' = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_U$$

$$\underline{\varepsilon}' = 0.5 (\underline{\text{grad}} \underline{u}' + \underline{\text{grad}}^T \underline{u}')$$

Champ  $\underline{\sigma}^*$  CSA (statiquement admissible) :

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma}^* + \underline{f}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega$$



# Evaluation du travail développé par $\underline{\sigma}^*$ dans $\underline{u}'$

Pour  $\underline{\sigma}^*$  CSA et  $\underline{u}'$  CCA *non* reliés par la loi de comportement

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (u'_{i,j} + u'_{j,i}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u'_{i,j} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left( (\sigma_{ij}^* u'_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}^* u'_i \right) d\Omega \\
 &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^* n_j u'_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u'_i d\Omega \\
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} F_i u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega
 \end{aligned}$$

Théorème des travaux virtuels :

$\forall u'_i$ , variation autour d'un état d'équilibre ( $u'_i = 0$  sur  $\partial\Omega_u$ )

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = -\delta W_{int} = \delta W_{ext} = \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega$$

# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
  - Cinématique
  - Equilibre
  - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
  - **Cinématique**
  - Equilibre
  - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

# Cinématique de la poutre de Timoshenko

L'idée consiste, pour un solide élancé, à postuler une description simplifiée, globale, de la structure, au lieu de chercher une résolution exacte. Les solutions obtenues sont d'autant plus satisfaisantes que l'élanement est important (et fausses dans le cas contraire).

Pour traiter le cas d'une poutre *plane*, on conserve dans la description géométrique deux translations et un angle. Il leur correspondra deux forces et un moment, conjugués (au sens du travail virtuel).

Sollicitation	axe de la poutre	perp à l'axe	moment de flexion
«force»	$N$	$T$	$M$
«déplacement»	$U$	$V$	$\theta$

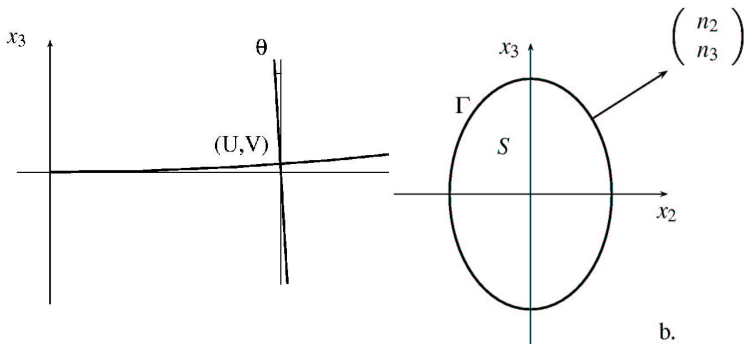
Pour le cas d'une poutre mince, on néglige le cisaillement (modèle  $N$ ,  $M$ , Navier–Bernoulli).

$$u_1 = U'(x_1) + \theta' x_3$$

$$u_3 = V'(x_1)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3$$

$$2\varepsilon'_{13} = V'_{,1} + \theta'$$



Plan de la ligne neutre

Section

# Travaux virtuels des efforts internes

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_{\Omega} (\varepsilon'_{11} \sigma_{11} + 2\varepsilon'_{13} \sigma_{13}) d\Omega \\ &= - \int_L \left( U'_{,1} \int_S \sigma_{11} dS + \theta'_{,1} \int_S x_3 \sigma_{11} dS + (V'_{,1} + \theta') \int_S \sigma_{13} dS \right) dx_1 \end{aligned}$$

On introduit alors naturellement les quantités  $N$ ,  $T$ ,  $M$  conjuguées de  $U$ ,  $V$ ,  $\theta$  :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

ce qui donne :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1$$

## Traitement du travail des efforts intérieurs

A partir de :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1$$

On intègre classiquement par parties le travail des efforts intérieurs, par exemple :

$$\int_L NU'_{,1} dx_1 = \int_L ((NU')_{,1} - N_{,1}U') dx_1 = [NU']_0^L - \int_L N_{,1}U' dx_1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & - \int_L (-N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \\ & + N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \\ & + M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \end{aligned}$$

## Travail des efforts extérieurs

On suppose que les forces concentrées sont appliquées aux extrémités ( $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$ ), et on intègre entre 0 et  $L$  les efforts répartis. Les données sont :

- les forces normales  $F_0$  et  $F_L$ , tangentiellles  $P_0$  et  $P_L$ ,
- les moments  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_L$ ,
- les efforts répartis sur la surface, représentés par des densités linéiques normales  $p$  et tangentielle  $t$  :

$$\delta W_{ext} = F_0 U'(0) + F_L U'(L) + P_0 V'(0) + P_L V'(L) + \mathcal{M}_0 \theta'(0) + \mathcal{M}_L \theta'(L) + \int_L (pV' + tU') dx_1$$



# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
  - Cinématique
  - Equilibre**
  - Loi de comportement
- 5 Poutres composites

# Caractérisation de l'équilibre

$$\begin{aligned}\delta W_{int} = & - \int_L (-N_{,1} U' - M_{,1} \theta' - T_{,1} V' + T \theta') dx_1 \\ & + N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \\ & + M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} = & F_0 U'(0) + F_L U'(L) + P_0 V'(0) + P_L V'(L) + \mathcal{M}_0 \theta'(0) + \mathcal{M}_L \theta'(L) \\ & + \int_L (pV' + tU') dx_1\end{aligned}$$

Comme l'égalité  $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$  est valable quel que soit le triplet  $(U', V', \theta')$ , on trouve, en identifiant terme à terme les expressions de  $\delta W_{int}$  et  $\delta W_{ext}$  :

$$N(0) = -F_0 \quad N(L) = F_L \quad T(0) = -P_0 \quad T(L) = P_L$$

$$M(0) = -\mathcal{M}_0 \quad M(L) = \mathcal{M}_L$$

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

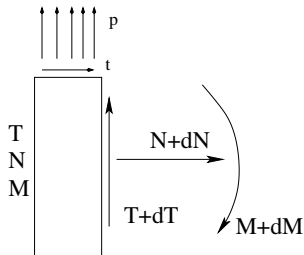
# écriture de l'équilibre

On pose :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

On obtient :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$



Signification physique  
pour une «tranche» de la poutre

$$dN = -tdx_1$$

$$dT = -pdx_1$$

$$dM = Tdx_1$$

# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes**
  - Cinématique
  - Equilibre
  - Loi de comportement**
- 5 Poutres composites

# Lois de comportement : force axiale

- On a  $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$
- On néglige  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$

$$N = \int_S \sigma_{11} dS = \int_S E\varepsilon_{11} dS = \int_S Eu_{1,1} dS$$

$$N = \int_S EU_{,1} dS + \int_S E(\theta x_3)_{,1} dS$$

Le deuxième terme du développement est nul.

$$N = U_{,1} ES$$

## Lois de comportement : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = \int_S x_3 E \varepsilon_{11} dS = E \int_S x_3 U_{,1} dS + E \int_S x_3 (\theta x_3)_{,1} dS$$

Le premier terme du développement est nul.

$$M = E \theta_{,1} \int_S x_3^2 dS = E \theta_{,1} I$$

avec  $I = \int_S x_3^2 dS$ , moment quadratique par rapport à  $x_2$ , si bien que :

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = E I \theta_{,1}$$

Pour une section rectangulaire, de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ ,  $I = \frac{2bh^3}{3}$

# Lois de comportement : cisaillement

$$T = \int_S \sigma_{13} = \int_S 2\mu \varepsilon_{13} dS = \int_S \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) dS = \int_S \mu (\theta + V_{,1}) dS$$

si bien que :  $T = \mu S (\theta + V_{,1})$

# Lois de comportement

Les relations suivantes constituent les lois de comportement globales de la structure.

$$N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}$$

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

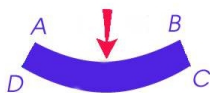
$$\theta_{,1} = M/EI$$

$$M_{,1} - T = 0$$

$$T_{,1} + p = 0$$



# Déformée



flexion



cisaillement

La flèche est obtenue comme solution d'un problème d'ordre 4 par rapport aux efforts appliqués ; elle est d'ordre 2 pour un moment constant :

$$V_{,1111} = -\frac{p}{EI} \quad V_{,11} = -\theta_{,1} = -\frac{M}{EI}$$

Degré de chaque variable  
en fonction de  $x_1$

	$p$	$T$	$M$	$\theta$	$V$
	-	-	0	1	2
	-	0	1	2	3
	0	1	2	3	4

# Méthode de résolution

Le *déplacement horizontal* s'obtient en intégrant la relation :

$$U_{,1} = N/ES$$

La *rotation relative* entre les sections s'obtient en intégrant la relation :

$$\theta_{,1} = M/EI$$

La *flèche* est le résultat de la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation elle même, et l'autre de l'effort tranchant  $T$  :

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

# Remarques

## Expression des contraintes locales

La connaissance de  $U$ ,  $V$  et  $\theta$  permet de remonter aux champs de déformation et de contrainte locaux. ( $\simeq E\varepsilon_{11} = Eu_{1,1}$ ) est la somme de deux termes, dus à l'élongation et à la flexion :

$$\sigma_{11} \simeq N/S + Mx_3/I$$

Si le cisaillement est négligeable

$$\theta = -V_{,1}$$

$$M = -EIV_{,11}$$

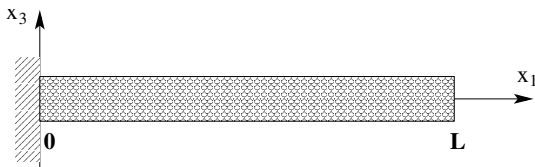
# Conditions aux limites

## *Poutre $0 < x_1 < L$*

- Extrémité libre :  $T = 0, M = 0$
- Extrémité chargée :  $N(0) = -F_0, N(L) = F_L, M(0) = -\mathcal{M}_0, M(L) = \mathcal{M}_L$
- Encastrement :  $V = 0, \theta = 0$
- Déplacement imposé :  $V = V_0, \theta = \theta_0$
- Appui simple :  $V = 0, M = 0$

# Poutre encastrée soumise à son propre poids

Poutre  $0 < x_1 < L$ , de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ , encastrée en  $x_1 = 0$



$$\begin{array}{lll}
 T_{,1} = -\rho g S & T(L) = 0 & T(x_1) = -\rho g S(x_1 - L) \\
 M_{,1} = T & M(L) = 0 & M(x_1) = -\frac{1}{2}\rho g S(x_1 - L)^2 \\
 \theta_{,1} = \frac{M}{EI} & \theta(0) = 0 & \theta(x_1) = -\frac{\rho g S}{6EI} [L^3 + (x_1 - L)^3] \\
 V_{,1} = -\theta & V(0) = 0 & V(x_1) = \frac{\rho g S}{6EI} \left( \frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)
 \end{array}$$

- Comme  $S = 2bh$ ,  $I = \frac{2}{3}bh^3$

$$V(x_1) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left( \frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)$$

## Poutre encastrée soumise à son propre poids (2)

- Expression de la flèche pour la poutre

$$V(x_1) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left( \frac{x_1^4}{4} - x_1^3 L + \frac{3}{2} x_1^2 L^2 \right)$$

- Flèche pour  $x_1 = L$ , pour  $x_1 = L/2$

$$V(L) = \frac{3\rho g L^4}{8Eh^2} \quad V(L/2) = \frac{17\rho g L^4}{128Eh^2}$$

- Flèche proportionnelle à  $\rho/E$ ,  $L^4$ ,  $h^2$
- (Flèche à  $L/2$  / Flèche max) =  $\frac{17}{128} \frac{8}{3} \approx 0,354$
- Application avec  $L=1,90$  m ;  $g=-9,81$  m/s<sup>2</sup> ;  $\rho=380$  kg/m<sup>3</sup> ;  $h=3,0$  mm ;  
 $E=8500$  MPa ;  $V_{max}=-24$  cm

# Forces ou moments concentrés

*Poutre*  $0 < x_1 < L$

- Lorsque la dérivée est définie :

$$T(x_1) = T(0) + \int_0^{x_1} \frac{dT}{d\xi} d\xi = T(L) + \int_L^{x_1} \frac{dT}{d\xi} d\xi$$

$$T(x_1) = T(0) - \int_0^{x_1} p(\xi) d\xi = T(L) - \int_L^{x_1} p(\xi) d\xi$$

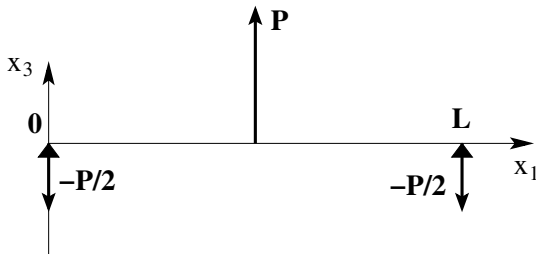
- Une force concentrée conduit à une discontinuité, ainsi :

$$T(x_1) = T(0) - \int_0^{x_1} p(\xi) d\xi - \sum P(X_i) \quad \text{avec : } 0 < X_i < x_1$$

- Exemple d'une poutre sur appuis simples, chargée en son milieu avec une force ponctuelle  $P$ . Hormis  $P$  en  $x_1 = L/2$ , les efforts extérieurs sont :

$$P_0 = -P/2 \quad P_L = -P/2$$

# Calcul de $T$ pour une poutre sur deux appuis simples (flexion 3 points)



- Efforts tranchants aux extrémités :

$$T(0) = -P_0 = P/2 \quad T(L) = P_L = -P/2$$

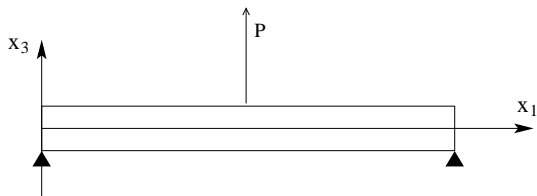
- Passage en  $x_1 = L/2$  :

$$\Delta T = -P$$

- Pour  $0 < x_1 < L/2$  :  $T(x_1) = P/2$
- Pour  $L/2 < x_1 < L$  :  $T(x_1) = -P/2$

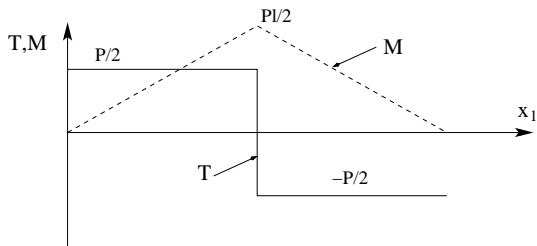


# Poutre sur deux appuis simples (flexion 3 points)



$$\text{si } x_1 < l/2 : T = P/2; \quad M = Px_1/2$$

$$\text{si } x_1 > l/2 : T = -P/2; \quad M = P(l - x_1)/2$$



## Flexion 3 points : calcul de la flèche max

L'angle  $\theta$  est tel que  $\theta_{,1} = Px_1/2EI$ , et, comme il est nul en  $x_1 = l$ , on a :

$$\theta = \frac{P(x_1^2 - l^2)}{4EI}$$

La flèche, qui est nulle en  $x_1 = 0$ , se calcule par :

$$V(x_1) = - \int_0^{x_1} \theta dx_1 + \int_0^{x_1} \frac{T}{\mu S} dx_1 = \frac{P}{4EI} (l^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}) + \frac{P}{2\mu S} x_1$$

Le maximum est obtenu pour  $x_1 = l$  :

$$V(l) = \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl}{2\mu S}$$

## Flexion 3 points : valeur numérique de la flèche max

$$V(l) = \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl}{2\mu S}$$

### Application numérique :

$P = -160 \text{ N}$ ,  $l = 250 \text{ mm}$ ,  $E = 75000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  
 $h = 2 \text{ mm}$  ( $l$  est la demi-longueur,  $h$  est la demi-épaisseur)

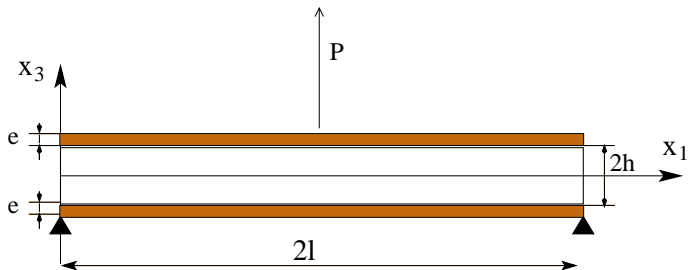
$$EI = \frac{2}{3} 100 \times 75000 \times 2^3 = 40000000 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$\mu S = \frac{750002 \times 1.3}{\times} 100 \times 2 = 5769231 \text{ N}$$

$$v = (-10.41 - 0.0017) \text{ mm}$$

Le terme lié à l'effort tranchant est négligeable.

# Poutre sandwich en flexion 3 points



On considère un sandwich, avec au centre ( $-h < x_3 < h$ ) un matériau à faibles propriétés mécaniques, de type mousse (caractéristiques élastiques  $E_m$  et  $\mu_m$ ), et, de chaque côté ( $-h - e < x_3 < -h$  et  $h < x_3 < -h + e$ ) une couche métallique (caractéristiques élastiques  $E_a$  et  $\mu_a$ ).

# Plan

- 1 Géométrie et chargement
- 2 Solution de Saint-Venant
- 3 Principe des travaux virtuels
- 4 Poutres homogènes planes
  - Cinématique
  - Equilibre
  - Loi de comportement
- 5 **Poutres composites**

## Poutre sandwich : force axiale

On a toujours :  $N = \int_S \sigma_{11} dS$  ; il faut reconstruire une approximation de  $\sigma_{11}$   
 La contrainte  $\sigma_{11}$  est *discontinue*, et :  $\sigma_{11}(x_3) = E(x_3)\varepsilon_{11}$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3)$$

$$N = U_{1,1} \int_S E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3 dS$$

Si  $E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la seconde intégrale est nulle

$$N = \langle ES \rangle U_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle ES \rangle = \int_S E(x_3) dS$$

# Poutre sandwich : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3)$$

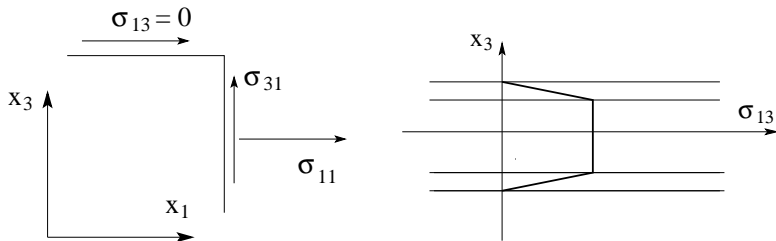
$$M = U_{1,1} \int_S x_3 E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3) x_3^2 dS$$

$E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la première intégrale est nulle

$$M = \langle EI \rangle \theta_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle EI \rangle = \int_S E(x_3) x_3^2 dS$$

## Poutre sandwich : cisaillement

La contrainte  $\sigma_{13}$  est *continue* à l'interface. Il y a une incohérence en surface, car la valeur donnée par la théorie sur une facette de normale parallèle à  $x_1$  est non nulle, alors que la surface  $x_3$  est libre... Dans les couches externes, la contrainte  $\sigma_{13}$  n'est pas égale à  $2\mu\varepsilon_{13}$ .



$$T = \int_S \sigma_{13} dS \approx \int_0^b \int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = (V_{,1} + \theta) \int_{-h}^{+h} 2b\mu(x_3) dx_3$$

$$T \approx \langle \mu S \rangle_{-h}^{+h} (V_{,1} + \theta)$$



# Forme générale des équations pour une poutre composite

Si la distribution des modules n'est pas paire en  $x_3$ , il y a un couplage entre traction et flexion. On doit écrire :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S E_i dS & \int_S E_i x_3 dS & 0 \\ \int_S E_i x_3 dS & \int_S E_i x_3^2 dS & 0 \\ 0 & 0 & \int_S \mu_i dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{,1} \\ V_{,1} + \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

## Poutre sandwich en flexion 3 points : flèche max

Les calculs effectués ci-dessus restent valables, à condition d'utiliser les valeurs homogénéisées des produits  $EI$  et  $\mu S$  :

$$v = \frac{Pl^3}{6 \langle EI \rangle} + \frac{Pl}{2 \langle \mu S \rangle}$$

L'aluminium ( $E_a, \mu_a$ ), est situé entre les cotes  $\pm h$  et  $\pm(h+e)$ . La mousse ( $E_m, \mu_m$ ) entre les cotes  $\pm h$ . Il vient donc :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} b (E_a ((h+e)^3 - h^3) + E_m h^3)$$

$$\langle \mu S \rangle = 2bh\mu_m$$

## Poutre sandwich en flexion 3 points

### Application numérique :

L'ensemble ( $P = -160$  N,  $l = 250$  mm,  $E_a = 75000$  MPa,  $E_m = 20$  MPa,  $\nu_m = 0.3$ ,  
 $b = 100$  mm,  $e = 2$  mm,  $h = 15$  mm) conduit à :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} \times 100(75000 \times (17^3 - 15^3) + 20 \times 15^3) = 7694500000 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$\langle \mu S \rangle = 2 \times 100 \times 15 \times \frac{20}{2 \times 1.3} = 23077 \text{ N}$$

$$V = (-0.054 - 0.867) \text{ mm}$$

C'est maintenant le terme lié à l'effort tranchant qui est prépondérant. On note l'importance qu'il y a à conserver un matériau qui possède des propriétés non négligeables comme cœur de la poutre. Ainsi, avec un module d'Young de 0,80 MPa au lieu de 20 MPa, on trouverait une flèche de plus de 22 mm, en ayant donc perdu tout l'avantage de l'assemblage «sandwich».

# Finite element computations

## Material parameter

Aluminium alloy : Young's modulus  $E_a$ , Poisson's ratio  $\nu_a = 0.3$

Foam, calcul B : Young's modulus  $E_f$ , Poisson's ratio  $\nu_f$

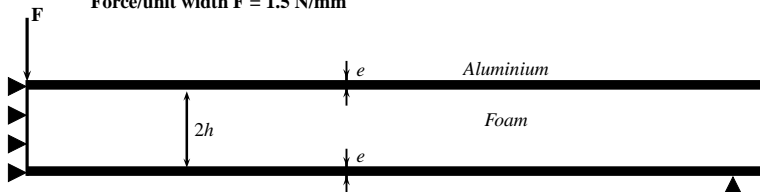
## Geometry

Foam thickness  $2h$ , Alu thickness =  $e$

Length  $\times$  Width of the plate = 500 mm  $\times$  100 mm

## Loading

Force/unit width  $F = 1.5$  N/mm



## Mesh and boundary conditions

Aluminium alloy :  $E = 75 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$

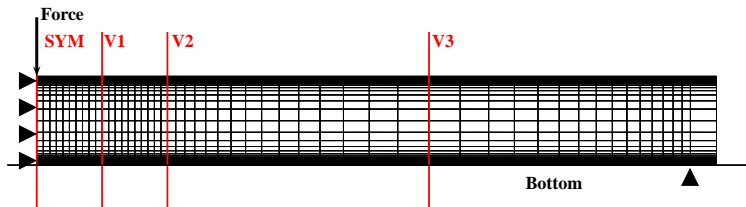
Foam, calcul B :  $E = 0.907 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.2$

Foam, calcul C :  $E = 20. \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.2$

Load =  $0.80 \text{ N/mm}$ , corresponding to  $150 \text{ N}$  on a  $100 \text{ mm}$  plate

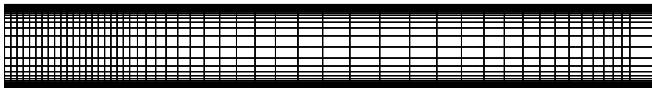
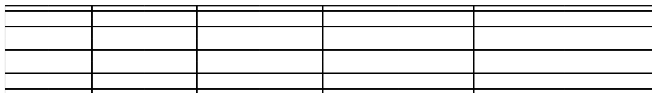
**A** : Half length =  $250 \text{ mm}$ , Alu width =  $4 \text{ mm}$

**B and C** : Half length =  $250 \text{ mm}$ , Alu width =  $2 \text{ times } 2 \text{ mm}$ , Foam =  $30 \text{ mm}$

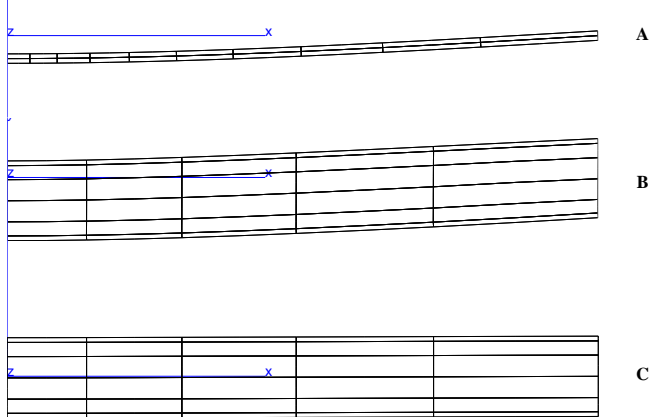


## Coarse and Fine meshes

---



## Deformed shapes



# Vertical displacement

