

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 2015

Étude du contact de Hertz et au-delà

1 Introduction du sujet et des outils

Présentation et Objectifs

Le sujet de ce mini-projet est le contact entre un corps sphérique (une balle en caoutchouc) et une surface plate et rigide (PMMA Plexiglas). Nous allons l'étudier au travers des essais, des calculs analytiques et des simulations numériques. Au cours de ce projet nous allons apprendre des techniques de mesure, de traitement statistique des données et des calculs par éléments finis non-linéaires.

Calculs analytiques. Nous allons étudier la théorie du contact de Hertz¹, déduire des équations générales et les adapter à notre cas - contact entre un corps sphérique élastique (E module de Young, ν coefficient de Poisson, R rayon) et une surface plate et rigide. Nous apprendrons également le concept d'un module effectif E^* , largement utilisé en mécanique de contact. En outre, nous allons essayer de trouver la valeur E^* correspondant aux mesures effectuées en collant des courbes analytiques $F(d)$ (force-déplacement) et $a(F)$ (rayon de contact – force). Enfin, nous allons déterminer l'intervalle d'applicabilité de la théorie de Hertz.

Essais. Dans les essais, nous allons mesurer le rayon de contact a , la réaction F et le déplacement d de l'indenteur. Ces mesures vont être réalisées sur un montage dédié qui permet de photographier la tache de contact. Par la suite, ces photographies vont être traitées dans un logiciel graphique pour extraire le rayon de contact. En se basant sur de nombreux tests nous allons obtenir une base de données $\{d_i, F_i, a_i\}$, où i désigne le numéro de la mesure. La marge des charges étudiées doit être choisie correctement en fonction du rayon de contact observé, à savoir nous voudrions avoir des points de mesures qui correspondent à la théorie du contact linéaire de Hertz [1] ainsi que des mesures au-delà des limitations de cette théorie. Le but des essais est d'obtenir deux courbes : pour l'évolution de la réaction en fonction du déplacement $F(d)$ et l'évolution du rayon de contact en fonction de la charge $a(F)$. Pour cela nous allons traiter des mesures brutes avec des méthodes statistiques pour extraire des valeurs moyennées et les barres d'incertitude (Fig. 1). A la fin du cours, nous allons vérifier nos mesures et estimations du module effectif en effectuant des mesures du module de Young

de caoutchouc sur une éprouvette dédiée.

Simulation numérique. Pour aller au-delà de la théorie du contact linéaire, nous allons faire des simulations numériques avec des valeurs des constantes élastiques déterminées. Pour cela nous utilisons un code de calcul par éléments finis avec un matériau hyper-élastique en grandes déformations.

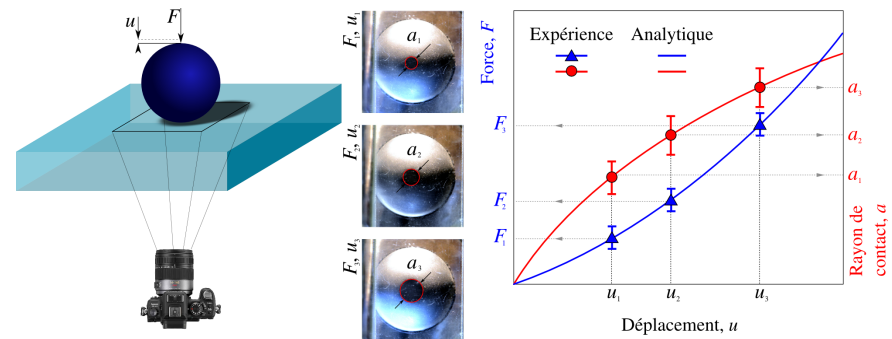


Fig. 1 : Schéma des essais du contact, mesures de la tache de contact, les points expérimentaux avec des barres d'erreur et les courbes analytiques collées

Matériel, documents, et logiciels

On dispose d'une balle en caoutchouc que l'on va mettre en contact avec une plaque de PMMA (lubrifié), un outil pour mesurer le déplacement et la réaction, une balance pour mesurer le poids, et un appareil de photo numérique pour des prises de vues. Les documents bibliographiques explicitant la théorie du contact de Hertz seront également à notre disposition. Le logiciel élément finis Z-set (www.zset-software.com) ainsi que des instructions détaillées seront accessibles sur la page web du cours.

1. Contact de Hertz – contact sans frottement entre des corps elliptiques en élasticité linéaire.

2 Programme détaillé

2.1 Bibliographie

Q1.1 : Réaliser une étude bibliographique sur le contact de Hertz ; déduire les équations correspondant au cas considéré : contact entre une sphère élastique et un plan rigide.

Q1.2 : Réfléchir sur l'interprétation du module effectif E^* ; quelles conséquences a-t-il sur les mesures effectuées ? Pourrions-nous avec les essais de contact déterminer le module de Young E et le coefficient de Poisson ν du matériau de la balle ?

Q1.3 : [Pour le rapport #1] Réaliser une étude bibliographique sur le comportement des caoutchoucs ; est-ce que ce matériau peut être considéré linéairement élastique ? Si oui, dans quels cas ? Si non, quel modèle faudrait-il utiliser ?

Q1.4 : [Pour le rapport #1] Réaliser une étude bibliographique sur l'analyse statistique des données de mesures ; déduire le nombre de tests que l'on aura besoin d'effectuer pour minimiser les incertitudes de mesures des valeurs moyennes, par exemple, combien de test aurons-nous besoin d'effectuer pour trouver une courbe moyennée avec une erreur $\epsilon = 10\%, 5\%, 1\%$. Pensez-vous que l'erreur que l'on fait dépend de la charge ? Quelles-sont d'autres sources d'erreurs ?

2.2 Essais de contact

Q2.1 : Effectuer une série d'essais sur le contact ; trouver des marges des forces et des déplacements qui permettent de rester dans le cadre de la théorie de Hertz. Aller au-delà de ces marges pour comprendre ensuite quelle erreur nous ferons en acceptant la théorie du contact linéaire pour toutes les mesures.

Q2.2 : Faire un tableau : déplacement – force – rayon de contact $\{d_i, F_i, a_i\}$; calculer des courbes moyennées et les barres d'incertitude ; parmi les valeurs mesurées quelles sont les plus précises ? Ranger les en ordre de précision ; trouver des incertitudes de mesures de chacune.

Q2.3 : [Pour le rapport #2] Quelle est la limite approximative de la charge pour laquelle le PMMA peut être considéré rigide par rapport aux déformations de la balle ?

2.3 Calculs analytiques

Q3.1 : En ayant à disposition les équations de la théorie de Hertz pour le cas considéré, plotter des courbes $F(d)$ et $a(F)$ pour différentes valeurs du module élastique effectif ; comparer avec des courbes expérimentales ; expliquer les tendances.

Q3.2 : Trouver approximativement la limite de validité de la théorie du contact linéaire de Hertz ; qu'est-ce qui se passe au-delà de cette limite ?

Q3.3 : [Pour le rapport #3] La théorie linéaire du contact est universellement utilisée pour modéliser les matériaux granulaires (sable, cailloux, avalanches, etc). Proposer une extension phénoménologique de cette théorie pour des assemblages de balles en caoutchouc soumis aux fortes compressions ; comparer ce modèle avec la théorie linéaire ?

2.4 Simulations numériques

Utiliser la mise en donnée interactive par élément finis fournie sur le site du cours.

Q4.1 : Effectuer des calculs d'une demi-sphère en contact avec un plan rigide ; quelles constantes d'élasticité faut-il utiliser, justifier votre choix.

Q4.2 : justifier l'approximation axisymétrique ; comment peut-on déterminer le rayon de contact en utilisant les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau données comme :

$$s \geq 0, \quad p \leq 0, \quad sp = 0,$$

où s est la séparation entre des points, p est la pression de contact.

Q4.3 : Aller au-delà de la théorie linéaire de contact en introduisant dans les calculs le frottement, un matériau hyper-élastique et de grandes déformations ; comment ça change les courbes $F(d)$ et $a(F)$?

Q4.4 : Trouver des constantes élastiques du PMMA et les introduire dans la simulation ; est-ce que l'hypothèse d'un obstacle rigide reste valable pour des mesures réalisées ?

3 Bibliographie

[1] Johnson, K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press, 1987.